II.4.2.1. Système Linéaire Libre à amortissement sous critique (ζ<1)

Ce cas correspond à ζ<1 et C<2Mω. La solution de l'équation (II.27) conduit aux deux solutions :

$$s = -\zeta\omega \mp i\omega\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \text{II.29}$$

Introduisant la quantité

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} \qquad \text{II.30}$$

appelée *pulsation propre amortie*, la réponse du système soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit :

$$u(t) = \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D}\sin(\omega_D t) + u(0)\cos(\omega_D t)\right]e^{-\xi\omega t} \qquad \text{II.31}$$

La solution peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude ρ et la phase θ sous la forme :

$$u(t) = \rho e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta) \qquad \text{II.32}$$

Elle est représentée sur la figure en fonction du temps

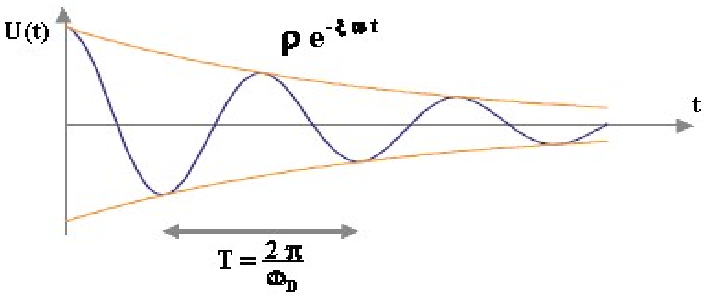

Fig. II.6 Vibration libre d'un système à amortissement sous-critique

L'examen de la fig II.6 montre que la réponse passe par des extrema espacés d'un temps $T=2\pi/\omega_D$; l'amplitude des extrema, égale à $\rho e^{-\xi\omega t}$, décroît en fonction du temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant à un déplacement nul.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement critique ξ est élevé (figure II.7).

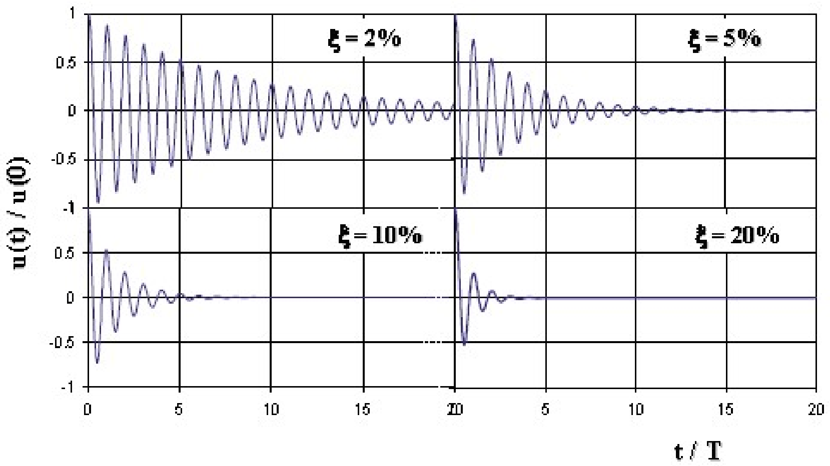

Fig. II.7 Influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous-amorti

Si l'on considère deux extrema successifs, de même signe, dans la réponse vibratoire, le rapport des amplitudes est égal à :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}} \qquad \text{II.33}$$

Prenant le logarithme des deux membres de l'équation II.33 le pourcentage d'amortissement critique équivalent est égal :

$$\delta = \text{Ln}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \text{II.34}$$

qui pour les faibles valeurs de ξ se réduit à :

$$\delta = 2\pi\xi \qquad \text{II.35}$$

La quantité δ est appelée décrément logarithmique. La mesure expérimentale de ce décrément logarithmique permet d'accéder au pourcentage d'amortissement critique d'un système, sans nécessairement connaître la valeur de la constante d'amortisseur c. Alliée à la définition du pourcentage d'amortissement critique équivalent d'un système, tel qu'il a été défini aux paragraphes II.2 (eq II.3), on dispose ainsi d'une méthode expérimentale pour caractériser globalement la dissipation d'énergie dans une structure sans en connaître nécessairement l'origine physique.

Pour conclure sur l'oscillateur à amortissement sous-critique, on notera que pour les faibles valeurs de ξ (typiquement inférieures à 20%) telles qu'on les rencontre dans la pratique, on peut sans préjudice confondre ω avec ω_D. La figure II.8 présente la variation ω/ω_D en fonction de ξ qui est représentée par un cercle de rayon unité.

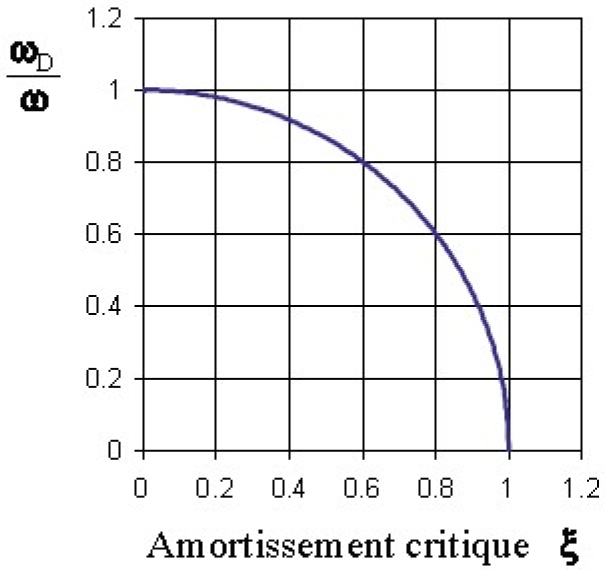

Fig. II.8 : Variation de la pulsation propre amortie en fonction de ξ

II.4.2.2. Système Linéaire Libre à amortissement critique (ζ=1)

Ce cas correspond à ξ=1 et C=2Mω.

Sous les mêmes conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$, la réponse du système s'écrit :

$$u(\mathbf{t}) = \left[(1+\omega\mathbf{t})\,u(0) + \mathbf{t}\,\dot{u}(0)\right] e^{-\omega t} \qquad \text{II.36}$$

Elle est présentée sur la fig II.9 . La réponse ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers 0 au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations.

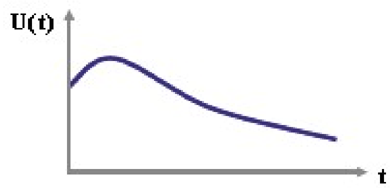

Fig. II.9 : Vibration libre d'un système à amortissement critique

II.4.2.3. Système Linéaire Libre à amortissement sur-critique (ζ>1)

Ce cas correspond à $\xi>1$ et $C>2M\omega$. La solution de l'équati II.27 ') s'écrit :

$$u(\mathbf{t}) = \left[\frac{\dot{u}(0)+\xi\omega u(0)}{\hat{\omega}}\mathrm{Sh}(\hat{\omega}\mathbf{t}) + u(0)\mathrm{Ch}(\hat{\omega}\mathbf{t})\right]e^{-\xi\omega t} \qquad \text{II.37}$$

avec

$$\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - \mathbf{1}} \qquad \text{II.38}$$

On notera que la vibration libre d'un système sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que le système revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.