

# Chapitre 3

## Surfaces Paramétrées

### I Surface Paramétrée, Plan Tangent

**Définition 1.1:** Une *surface paramétrée* (en abrégé S.P) de  $\mathbb{R}^3$  est un couple  $(\Sigma, M)$  où  $\Sigma$  est une partie de  $\mathbb{R}^3$  et  $M : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application continue sur  $U$  ( $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) telle que  $M(U) = \Sigma$ . L'application  $M$  est appelée une *représentation paramétrique de la surface*  $\Sigma$ .

S'il existe une autre application continue  $P : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $W$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et telle que  $P(W) = \Sigma$ , c'est-à-dire que  $P$  est une autre représentation paramétrique de  $\Sigma$ , tout homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow W$  tel que  $M = P \circ \varphi$  s'appelle *changement de paramètre* pour  $\Sigma$ , et  $P$  une reparamétrisation de  $(\Sigma, M)$ .

Si la surface paramétrée  $(\Sigma, M)$  est de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), c'est-à-dire que  $M$  est de classe  $C^k$ , et si  $\varphi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme,  $P$  est alors une  $C^k$ -reparamétrisation.

Dans tout ce qui suit, les surfaces paramétrées considérées seront de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). La notion de plan tangent qui va être donnée peut être étendue à des surfaces paramétrées par des applications qui ne sont pas de classe  $C^1$ , mais cela est de peu d'intérêt.

Soit  $(\Sigma, M)$  une surface paramétrée de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) et soit

$$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \gamma(t) = (u(t), v(t)) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

une application continue de l'intervalle  $I$  dans l'ouvert  $U = \text{dom}M$ . L'application

$$M \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

paramétrise alors une courbe  $\Gamma = M \circ \gamma(I) \subset \Sigma$ . On dit qu'une telle courbe est *tracée* sur  $\Sigma$ .

Lorsque  $\gamma$  est de classe  $C^k$  on dit que  $(\Gamma, M \circ \gamma)$  est une courbe paramétrée de classe  $C^k$  tracée sur  $\Sigma$ .

Soit  $(u_0, v_0) \in U$  et soit  $t_0 \in I$  tel que  $(u_0, v_0) = \gamma(t_0) = (u(t_0), v(t_0))$ .  $M_0 = M(u_0, v_0) = M(\gamma(t_0)) = (M \circ \gamma)(t_0)$  est un point par lequel passe la courbe  $\Gamma = (M \circ \gamma)(I)$  tracée sur  $\Sigma$ .

On définit deux courbes particulières tracées sur  $\Sigma$  passant par  $M_0$  de la manière suivante :  
 Soit un pavé ouvert  $I \times J$  ( $I$  et  $J$  sont des intervalles ouverts) de centre  $(u_0, v_0)$  inclus dans  $U = \text{dom}M$  (ce pavé existe toujours puisque  $U$  est un ouvert) et soient les applications continues

$$\gamma_{v_0} : u \in I \rightarrow \gamma_{v_0}(u) = (u, v_0) \in I \times J \subset U$$

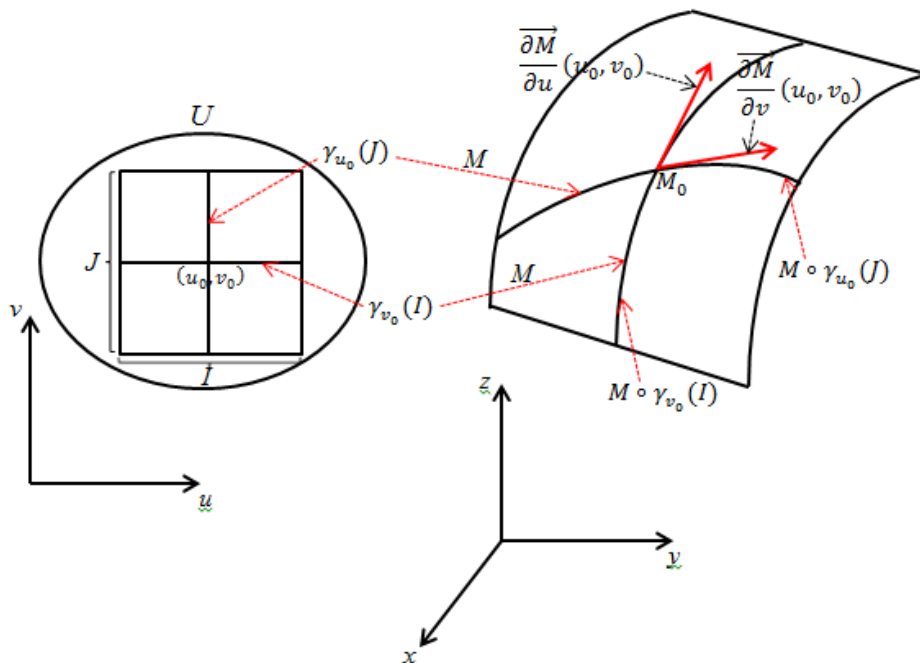
$$\text{et } \gamma_{u_0} : v \in J \rightarrow \gamma_{u_0}(v) = (u_0, v) \in I \times J \subset U.$$

Les applications

$$M \circ \gamma_{v_0} : I \xrightarrow{\gamma_{v_0}} U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{M} \mathbb{R}^3$$

$$\text{et } M \circ \gamma_{u_0} : J \xrightarrow{\gamma_{u_0}} U \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{M} \mathbb{R}^3$$

paramétrisent deux courbes tracées sur  $\Sigma$  appelées *lignes coordonnées* passant par  $M_0$  (voir figure ci-dessous).



**Figure 1:**

**Définition 1.2:** considérons toutes les courbes de classe  $C^1$  tracées sur  $\Sigma$  passant par  $M_0$  et pour lesquelles  $M_0$  est un point régulier. Si les tangentes en  $M_0$  à ces courbes engendrent un plan de  $\mathbb{R}^3$ , on dit que ce plan est le *plan tangent* en  $M_0$  à la surface paramétrée  $(\Sigma, M)$  et on le note  $\Pi_{M_0}\Sigma$ . La direction de ce plan, appelée l'*espace vectoriel tangent* à  $\Sigma$  au point  $M_0$  et notée  $T_{M_0}\Sigma$ , est l'espace vectoriel qui lui est associé.

**Théorème 1.1:** Soit  $(\Sigma, M)$  une surface paramétrée de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Si le point  $M_0 = M(u_0, v_0)$  est tel que les vecteurs  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$  soient linéairement indépendants, la surface paramétrée  $(\Sigma, M)$  possède un plan tangent en  $M_0$  de direction l'espace vectoriel engendré par  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ .

Si  $M_0$  satisfait aux conditions du théorème ci-dessus, on dit que  $M_0$  est un *point régulier* de  $(\Sigma, M)$ , sinon on dit que c'est un *point singulier* de  $(\Sigma, M)$ .

$M_0$  est donc un point régulier de  $(\Sigma, M)$  si et seulement si

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}.$$

$M$  étant de classe  $C^k$ ,  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  est de classe  $C^{k-1}$  donc a fortiori continue; l'ensemble des points  $(u, v)$  de  $U$  tels que  $M(u, v)$  est un point régulier de  $(\Sigma, M)$  est donc un ouvert de  $U$ .

Dans les définitions et les résultats généraux énoncés dans la suite de ce chapitre les surfaces paramétrées considérées auront tous leurs points réguliers (sauf mention contraire). De telles surfaces seront dites *surfaces paramétrées régulières*.

**Remarque 1:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) &= \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\overrightarrow{M(u, v_0)} - \overrightarrow{M(u_0, v_0)}}{u - u_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\overrightarrow{M \circ \gamma_{v_0}(u)} - \overrightarrow{M \circ \gamma_{v_0}(u_0)}}{u - u_0} \\ &= \frac{d(\overrightarrow{M \circ \gamma_{v_0}})}{du}(u_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) &= \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\overrightarrow{M(u_0, v)} - \overrightarrow{M(u_0, v_0)}}{v - v_0} = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{\overrightarrow{M \circ \gamma_{u_0}(v)} - \overrightarrow{M \circ \gamma_{u_0}(v_0)}}{v - v_0} \\ &= \frac{d(\overrightarrow{M \circ \gamma_{u_0}})}{dv}(v_0). \end{aligned}$$

**Exemple 1:** Soit le repère canonique  $(0, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$  de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $(\Sigma, M)$  la surface paramétrée définie par :

$M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a \cos u, a \sin u, v)$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

Si  $M_0 \equiv M(u_0, v_0)$  est un point de  $\Sigma = M(\mathbb{R}^2)$ , les lignes coordonnées passant par  $M_0$  sont les images des applications suivantes :

-  $M \circ \gamma_{v_0}(u) = M(u, v_0) = (a \cos u, a \sin u, v_0)$  qui est le cercle  $C$  de rayon égale  $a$  et de centre  $(0, 0, v_0)$ , c'est-à-dire centré sur l'axe des  $z$  et situé dans le plan horizontal  $z = v_0$ .

-  $M \circ \gamma_{u_0}(v) = M(u_0, v) = (a \cos u_0, a \sin u_0, v)$  qui est la droite verticale  $\Delta$  définie par le système  $\begin{cases} x = a \cos u_0 \\ y = a \sin u_0 \end{cases}$ , c'est-à-dire la droite verticale passant par le cercle  $C$  au point  $(a \cos u_0, a \sin u_0, v_0)$ .

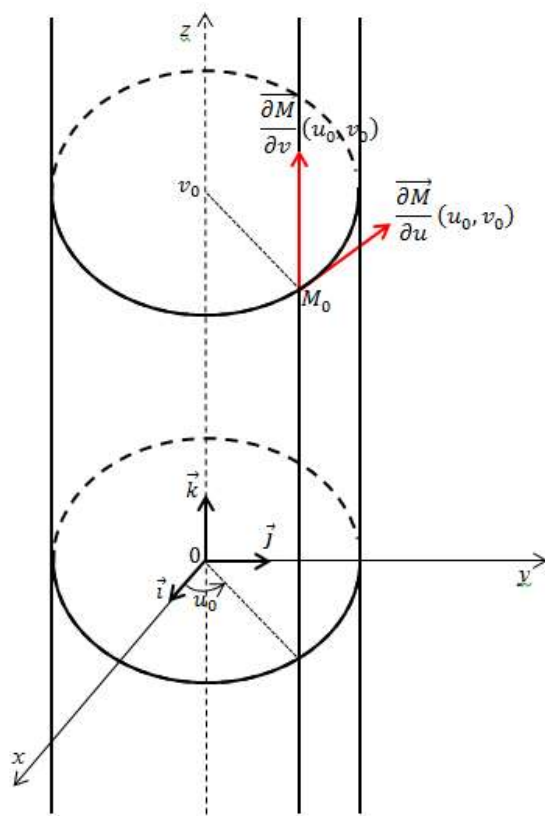
On voit donc que  $M$  paramétrise le cylindre de révolution  $\Sigma$  d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$  (voir figure ci-dessous).

Au point  $M_0$  on a :

$\frac{d(M \circ \gamma_{v_0})}{du}(u_0) = \frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) = (-a \sin u_0, a \cos u_0, 0)$ , qui est un vecteur non nul horizontal, tangent au point  $M_0$  à la ligne coordonnée  $M \circ \gamma_{v_0}(\mathbb{R})$  qui est le cercle  $C$ .

$\frac{d(M \circ \gamma_{u_0})}{dv}(v_0) = \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0) = (0, 0, 1)$ , qui est un vecteur non nul vertical, tangent au point  $M_0$  à la ligne coordonnée  $M \circ \gamma_{u_0}(\mathbb{R})$ , plus précisément ce vecteur se trouve sur la ligne coordonnée  $M \circ \gamma_{u_0}(\mathbb{R})$ , puisque celle-ci n'est autre que la droite verticale  $\Delta$ .

Quel que soit le point  $M_0$ , ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, et donc le plan tangent à  $\Sigma$  au point  $M_0$  est bien défini. C'est un plan vertical passant par  $M_0$  et de direction l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



**Figure 2:**

**N.B:** Sur la figure ci-dessus, on a pris  $0 \leq u_0 \leq \frac{\pi}{2}$ , ainsi les coordonnées du vecteur

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial u}}(u_0, v_0) \text{ ont pour signes } \begin{cases} x'(u_0, v_0) = -a \sin u_0 \leq 0 \\ y'(u_0, v_0) = a \cos u_0 \geq 0 \\ z'(u_0, v_0) = 0 \end{cases} .$$

**Exemple 2:** Soit le repère canonique  $(0, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$  de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $M : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a_1 u + a_2 v + a_3, b_1 u + b_2 v + b_3, c_1 u + c_2 v + c_3).$$

On en déduit que :

$$(x - a_3, y - b_3, z - c_3) = u(a_1, b_1, c_1) + v(a_2, b_2, c_2).$$

Ceci implique

$$\overrightarrow{PM}(u, v) = u \vec{X} + v \vec{Y},$$

où le point  $P = (a_3, b_3, c_3)$  et les vecteurs  $\vec{X} = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{Y} = (a_2, b_2, c_2)$ .

Si les vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont linéairement indépendants, l'application  $M$  paramétrise le plan  $\Delta$  passant par le point  $P = (a_3, b_3, c_3)$  et dont la direction est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ . De plus on a :

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u, v) = (a_1, b_1, c_1) = \vec{X} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u, v) = (a_2, b_2, c_2) = \vec{Y}.$$

Par conséquent en tout point  $M_0$  du plan  $\Delta$ , le plan tangent est défini (puisqu'on a supposé que  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont linéairement indépendants) et est évidemment confondu avec  $\Delta$  lui-même.

## II Changement de Paramètres. Orientation

Soit  $(\Sigma, M)$  une surface paramétrée de  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), où  $M : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Soit  $P : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une  $C^k$ -reparamétrisation de la surface  $(\Sigma, M)$  et soit

$$\theta : (u, v) \in U \rightarrow \theta(u, v) = (\theta_1(u, v), \theta_2(u, v)) = (s, t) \in W$$

le changement de paramètre (c-a-d, le  $C^k$ -difféomorphisme) associé,  $M = P \circ \theta$ .

**Proposition 2.1:** Si  $M_0 = M(u_0, v_0) = P(s_0, t_0)$ , où  $(s_0, t_0) = \theta(u_0, v_0)$ , est un point régulier de la surface paramétrée  $(\Sigma, M)$ , c'est aussi un point régulier de la surface paramétrée  $(\Sigma, P)$  et les plans tangents à ces deux surfaces paramétrées en  $M_0$  sont identiques.

### Démonstration:

$M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma, M)$ , équivaut à  $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0, v_0)$  linéairement indépendants et donc l'espace vectoriel  $\text{eng} \left\{ \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$  est la direction du plan tangent  $\Pi_{M(u_0, v_0)}\Sigma$ .

Comme

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\overrightarrow{\partial P \circ \theta}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial s}(s_0, t_0) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial t}(s_0, t_0) \cdot \frac{\partial t}{\partial u}(u_0, v_0) \quad (*)$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\overrightarrow{\partial P \circ \theta}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial s}(s_0, t_0) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial t}(s_0, t_0) \cdot \frac{\partial t}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (**)$$

Ces deux formules, que l'on peut mettre sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial s}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial t}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial t}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad (***)$$

impliquent que

$\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}(s_0, t_0)$  et  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(s_0, t_0)$  sont linéairement indépendants, donc  $M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma, P)$  et  $\text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\} = \text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(s_0, t_0) \right\}$ . Par conséquent les plans tangents  $\Pi_{M(u_0, v_0)}\Sigma$  et  $\Pi_{P(s_0, t_0)}\Sigma$  sont identiques.

Si  $M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma, P)$ , ceci équivaut à  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}(s_0, t_0)$  et  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(s_0, t_0)$  linéairement indépendants et donc l'espace vectoriel  $\text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(s_0, t_0) \right\}$  est la direction du plan tangent  $\Pi_{P(s_0, t_0)}\Sigma$ .

Comme la matrice carrée  $\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial s}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial t}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial t}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$  dans (\*\*\*) est précisément la matrice jacobienne du  $C^k$ -difféomorphisme  $\theta$  au point  $(u_0, v_0)$ , donc elle est inversible. Il en résulte que  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$  sont linéairement indépendants, donc  $M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma, M)$  et  $\text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(s_0, t_0) \right\} = \text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$ . Par conséquent les plans tangents  $\Pi_{P(s_0, t_0)}\Sigma$  et  $\Pi_{M(u_0, v_0)}\Sigma$  sont identiques. ■

**Remarque 2:** La démonstration ci-dessus montre que faire une  $C^k$ -reparamétrisation revient à faire un changement de bases dans l'espace tangent à la surface.

**Définition 2.1:** Soit  $(\Sigma, M)$  une surface paramétrée de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Si  $M_0 = M(u_0, v_0)$  est un point régulier de  $(\Sigma, M)$ , le vecteur

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0},$$

orthogonal à l'espace vectoriel tangent  $T_{M_0}\Sigma = \text{eng} \left\{ \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$ , est dit *vecteur normal* à la surface  $\Sigma$  en  $M_0$ . Le vecteur

$$\overrightarrow{K_M(u_0, v_0)} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

est appelé le *vecteur normal unitaire* à  $(\Sigma, M)$ .

L'application  $\overrightarrow{K}_M : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (T_{M(u,v)}\Sigma)^\perp = \left( \text{eng} \left\{ \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u,v) \right\} \right)^\perp \subset \mathbb{R}^3$  est appelée le *champ des normales unitaires* à la surface paramétrée  $(\Sigma, M)$ .

**Définition 2.2:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$ . Les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont dites de *même orientation*, si le déterminant  $\det(P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)) > 0$  où  $P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ . Elles sont dites d'*orientation opposée* si  $\det(P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)) < 0$ .

La relation ‘‘même orientation’’ est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathcal{B}(E)$  des bases de  $E$ . Cette relation détermine exactement deux classes (même orientation, orientation opposée) puisque  $\det(P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)) \neq 0$ .

On définit l'*orientation* de l'espace vectoriel  $E$  par le *choix d'une de ces deux classes*. Toute base appartenant à la classe choisie comme orientation de  $E$  est dite *base directe*. On convient que la base canonique de  $E = \mathbb{R}^n$  est directe.

**Proposition 2.2:** Soit  $(\Sigma, P)$  une  $C^k$ -reparamétrisation de  $(\Sigma, M)$  et

$$\theta : (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \theta(u, v) = (s, t) \in W \subset \mathbb{R}^2$$

le  $C^k$ -difféomorphisme associé ( $M = P \circ \theta$ ). Si le déterminant de la matrice jacobienne de  $\theta$  est positif en tout point de  $U$ , alors

$$\overrightarrow{K}_M = \overrightarrow{K}_P \circ \theta.$$

**Démonstration:**

Montrer que  $\overrightarrow{K}_M = \overrightarrow{K}_P \circ \theta$  revient à montrer que

$$\forall (u, v) \in U, \overrightarrow{K}_M(u, v) = \overrightarrow{K}_P \circ \theta(u, v) = \overrightarrow{K}_P(s, t).$$

Pour alléger l'écriture des formules dans la démonstration; en un point quelconque

$(u, v) \in U$ , notons  $\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial s}(s, t)$  par  $\overrightarrow{P}'_s$ ,  $\frac{\partial s}{\partial u}(u, v)$  par  $s'_u$  et de manière analogue les autres termes des formules (\*) et (\*\*)<sup>précédentes</sup>.

Par rapport à la nouvelle notation  $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v}(u, v)$  s'écrivent :



$$\overrightarrow{M'_u} = \overrightarrow{P'_s} \cdot s'_u + \overrightarrow{P'_t} \cdot t'_u \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M'_v} = \overrightarrow{P'_s} \cdot s'_v + \overrightarrow{P'_t} \cdot t'_v.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'_u} \wedge \overrightarrow{M'_v} &= (\overrightarrow{P'_s} \cdot s'_u + \overrightarrow{P'_t} \cdot t'_u) \wedge (\overrightarrow{P'_s} \cdot s'_v + \overrightarrow{P'_t} \cdot t'_v) = \\ &= s'_u \cdot s'_v \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_s} + s'_u \cdot t'_v \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t} + t'_u \cdot s'_v \cdot \overrightarrow{P'_t} \wedge \overrightarrow{P'_s} + t'_u \cdot t'_v \cdot \overrightarrow{P'_t} \wedge \overrightarrow{P'_t} = \\ &= s'_u \cdot t'_v \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t} + t'_u \cdot s'_v \cdot \overrightarrow{P'_t} \wedge \overrightarrow{P'_s} \quad (\text{puisque } \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_s} = \overrightarrow{P'_t} \wedge \overrightarrow{P'_t} = \vec{0}) \\ &= (s'_u \cdot t'_v - t'_u \cdot s'_v) \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t}. \end{aligned}$$

L'expression  $(s'_u \cdot t'_v - t'_u \cdot s'_v)$  est positive par hypothèse, puisque c'est exactement le déterminant de la matrice jacobienne de  $\theta$  en un point quelconque de  $U$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{K_M(u, v)} &= \frac{\overrightarrow{M'_u} \wedge \overrightarrow{M'_v}}{\|\overrightarrow{M'_u} \wedge \overrightarrow{M'_v}\|} = \frac{(s'_u \cdot t'_v - t'_u \cdot s'_v) \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t}}{\|(s'_u \cdot t'_v - t'_u \cdot s'_v) \cdot \overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t}\|} = \frac{\overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t}}{\|\overrightarrow{P'_s} \wedge \overrightarrow{P'_t}\|} = \overrightarrow{K_P(s, t)} \\ &= \overrightarrow{K_P \circ \theta(u, v)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Dans le cas des hypothèses de la proposition ci-dessus, on dit que le changement de paramètres (c-a-d, le  $C^k$ -difféomorphisme)  $\theta$  préserve l'orientation de  $(\Sigma, M)$ , ou encore que les deux représentations paramétriques  $M$  et  $P$  définissent la même orientation de la surface  $\Sigma$ .

**Remarque 3:** Si  $M$  et  $P$  définissent la même orientation de la surface  $\Sigma$  en un point quelconque  $M_0 = M(u_0, v_0) = P(s_0, t_0)$ , les deux bases  $\left\{ \frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$  et  $\left\{ \frac{\partial P}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial P}{\partial t}(s_0, t_0) \right\}$  de  $T_{M_0}\Sigma$  ont même orientation.

**Remarque 4:** Si le déterminant de la matrice jacobienne de  $\theta$  garde un signe constant sur  $U$ , alors on a exactement deux possibilités pour la  $C^k$ -reparamétrisation  $P$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{K_M} &= \overrightarrow{K_P} \circ \theta \\ \text{ou } \overrightarrow{K_M} &= -\overrightarrow{K_P} \circ \theta. \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on dit que  $\theta$  reverse l'orientation de  $(\Sigma, M)$ .