

TD (Calcul d'intégrales)

Ce TD est destiné aux étudiants de 2^e année licence mines
(*Maths 4*)

May 9, 2020

Exercice 1 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle orientée positivement de centre 2 et de rayon 2.

Solution

On a $g(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)(z - 1)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1, \pm 2i\}$,

les singularités en $z = 1$ est intérieure de $\mathcal{C}$, $z = 2i$ et $z = -2i$ sont extérieures de $\mathcal{C}$

$$\text{donc } g(z) = \frac{\frac{z}{z^2 + 4}}{z - 1}$$

On applique la formule intégrale de Cauchy pour $z_0 = 1$ et $f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz &= 2i\pi f(1) \\ &= 2i\pi \frac{1}{1^2 + 4} \\ &= \frac{2}{5}i\pi . \end{aligned}$$

Exercice 2 *Calculer l'intégrale*

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos \pi z}{(2z + 1)^2(z - 2)^2} dz$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle orientée positivement de centre -1 et de rayon 2 .

Solution

On a $g(z) = \frac{\cos \pi z}{(2z+1)^2(z-2)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$,

les singularités en $z = -\frac{1}{2}$ est intérieure de $\mathcal{C}$, $z = 2$ est extérieure de $\mathcal{C}$

$$\text{donc } g(z) = \frac{\cos \pi z}{4(z-2)^2(z+\frac{1}{2})^2}$$

On applique l'extension de la formule intégrale de Cauchy pour $z_0 = -\frac{1}{2}$,
 $n = 1$ et $f(z) = \frac{\cos \pi z}{4(z-2)^2}$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}$, alors

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos \pi z}{(2z+1)^2(z-2)^2} dz = \frac{2i\pi}{1!} f'(-\frac{1}{2})$$

on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos \pi z}{4(z-2)^2} \implies f'(z) = \frac{-\pi(z-2)^2 \sin \pi z - 2(z-2) \cos \pi z}{4(z-2)^4} \\ \implies f'(-\frac{1}{2}) &= \frac{-\pi(-\frac{1}{2}-2)^2 \sin(\frac{-\pi}{2}) - 2(-\frac{1}{2}-2) \cos \frac{\pi}{2}}{4(-\frac{1}{2}-2)^4} = \frac{\pi}{25} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos \pi z}{(2z+1)^2(z-2)^2} dz &= \frac{2i\pi}{1!} \frac{\pi}{25} \\ &= \frac{2i\pi^2}{25}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Soit l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz.$$

Calculer l'intégrale I dans les cas suivants:

- 1) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre -1 et de rayon R_1 avec $R_1 < 1$.
- 2) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre -1 et de rayon R_2 avec $1 < R_2 < 2$.
- 3) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre -1 et de rayon R_3 avec $R_3 > 2$.

Solution

On a

$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)}$ possède deux pôles simples $z = 0$ et $z = 1$

donc

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en 0 et en 1.

1) f est holomorphe dans $\mathcal{C}(-1, R_1)$ car aucune singularité n'est dans $\mathcal{C}$, alors d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 0.$$

2) Dans ce cas, seule singularité en $z = 0$ est intérieure au cercle $\mathcal{C}(-1, R_2)$, alors d'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, 0),$$

on calcule $\operatorname{Res}(f, 0)$,

et comme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, alors $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{P(0)}{Q'(0)}$

on a $Q(z) = z(z-1) \implies Q'(z) = 2z-1 \implies Q'(0) = -1$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{\cos 0}{-1} = -1.$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = -2i\pi.$$

3) Dans ce cas, les singularités en $z = 0$ et en $z = 1$ sont intérieures au cercle $\mathcal{C}(-1, R_3)$, alors d'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 2i\pi [\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)],$$

on calcule $\operatorname{Res}(f, 1)$,

et comme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, alors $\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{P(1)}{Q'(1)}$

on a $Q(z) = z(z-1) \implies Q'(z) = 2z-1 \implies Q'(1) = 1$

$$\mathcal{R}es(f, 1) = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{\cos \pi}{1} = -1.$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)} dz = 2i\pi (-1 - 1) = -4i\pi.$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

Solution

On a

$f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$ possède un pôle simple $z = 0$ et un pôle double $z = 1$

donc

f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en 0 et en 1.

Les singularités en 0 et en 1 sont intérieures au cercle $\mathcal{C}(0, 2)$,

alors d'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = 2i\pi [\mathcal{R}es(f, 0) + \mathcal{R}es(f, 1)],$$

on calcule $\mathcal{R}es(f, 0)$, $\mathcal{R}es(f, 1)$

· $z = 0$ est un pôle simple

et comme $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, alors $\mathcal{R}es(f, 0) = \frac{P(0)}{Q'(0)}$

on a $Q(z) = z(z-1)^2 \implies Q'(z) = 3z^2 - 4z + 1 \implies Q'(0) = 1$

$$\mathcal{R}es(f, 1) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

· $z = 1$ est un pôle double, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}es(f, 2) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)e^z}{z^2} = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = 2i\pi (1 + 0) = 2i\pi.$$