

Intégration par la méthode des résidus

Ce cours est destiné aux étudiants de 2^e année licence mines
(*Maths 4*)

May 9, 2020

1 Intégrale curviligne

L'intégrale d'une fonction complexe de la variable complexe z nécessite de définir un contour $\mathcal{C}$ le long duquel on calcule cette intégrale. Cette notion n'existe pas pour les intégrales des fonctions réelles, car le domaine d'intégration étant tout ou partie de l'axe réel, le chemin suivi est de fait un segment dont les extrémités sont les bornes du domaine d'intégration. Une intégrale curviligne dépend donc du contour d'intégration $\mathcal{C}$ et se note Intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz.$$

Définition 1 Si l'on note $z(t)$ la définition paramétrique du contour $\mathcal{C}$, pour $a < t < b$, alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) \, dt.$$

1.1 Théorème de Cauchy

L'intégrale $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz$ dépend à priori de la fonction f à intégrer, mais aussi du contour d'intégration $\mathcal{C}$. Néanmoins, pour une fonction holomorphe, le théorème de Cauchy énonce un résultat fondamental.

Théorème 2 (Théorème de Cauchy) *Si f une fonction holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ simplement connexe, alors pour tout contour $\mathcal{C}$ fermé, on a*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0.$$

Exemple 3 Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+1}{z-3} \, dz$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

On a $f(z) = \frac{2z+1}{z-3}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{3\}$,

la singularité en $z = 3$ est extérieure de $\mathcal{C}$

ainsi f est holomorphe sur $\mathcal{C}$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2z+1}{z-3} \, dz = 0.$$

1.2 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 4 (Formule de Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe sur un disque fermé de centre z_0 et de rayon r , alors pour tout $|z - a| < r$, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \quad (1)$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre a et de rayon r .

Exemple 5 Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z+1} \, dz$

où $\mathcal{C}$ est la frontière orientée positivement du carré $-3 < x < 3$ et $-3 < y < 3$.

On a $g(z) = \frac{\sin z}{z+1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

la singularité en $z = -1$ est intérieure de $\mathcal{C}$.

On applique la formule intégrale de Cauchy pour $z_0 = -1$ et $f(z) = \sin z$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z+1} dz &= 2i\pi f(-1) \\ &= 2i\pi \sin(-1) \\ &= -2i\pi \sin 1. \end{aligned}$$

1.3 Dérivée de fonctions holomorphes

La formule intégrale de Cauchy peut se généraliser aux fonctions dérivées d'une fonction holomorphe. En effet, si f est une fonction holomorphe sur un domaine, toutes ses dérivées existent et sont elles aussi holomorphes sur ce domaine. On peut alors montrer une extension de la formule intégrale de Cauchy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (2)$$

Pour $n = 0$, on retrouve ainsi la formule intégrale de Cauchy de la relation (1).

Exemple 6 Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^3} dz$

où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 1 et de rayon 2.

On a $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, la singularité en $z = 0$ est intérieure de $\mathcal{C}$.

On applique la formule (2) pour $z_0 = 0$, $n = 2$ et $f(z) = e^z$ qui est une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$ et à l'intérieur de $\mathcal{C}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^3} dz &= \frac{2i\pi}{2!} f''(0) \\ &= \frac{2i\pi}{2} e^0 \\ &= i\pi. \end{aligned}$$

1.4 Théorème des résidus

Si une fonction admet un nombre fini de points singuliers, le théorème de Cauchy ne s'applique plus. La valeur de l'intégrale sur un contour $\mathcal{C}$ de la fonction f dépend alors des résidus de la fonction, qui se calculent en chaque point singulier.

Théorème 7 (Théorème des résidus) *Soit $\mathcal{C}$ le contour orienté positivement d'un domaine ouvert simplement connexe et $\{z_k, k \in [1, n]\}$ les affixes des points singuliers (n'appartenant pas à $\mathcal{C}$) d'une fonction complexe f .*

Alors

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Exemple 8 *Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz$*

où $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$ et $\mathcal{C}$ le cercle centré en 0 et de rayon r , $r \neq 1$.

La fonction $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$ possède deux pôles simples $z = i$ et $z = -i$.

On calcule les $\text{Res}(f, i)$ et $\text{Res}(f, -i)$, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{1 - i}{2i} = \frac{1 + i}{2} \\ \text{Res}(f, -i) &= \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{i - 1}{2}. \end{aligned}$$

• Pour $0 < r < 1$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0$$

car la fonction f est holomorphe à l'intérieure de $\mathcal{C}$ et sur $\mathcal{C}$.

· Pour $r > 1$, on a

$$\begin{aligned}\oint_c f(z) \, dz &= 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathcal{R}es(f, z_k) \\ &= 2i\pi [\mathcal{R}es(f, i) + \mathcal{R}es(f, -i)] \\ &= 2i\pi \left(\frac{1+i}{2} + \frac{i-1}{2} \right) \\ &= -2\pi.\end{aligned}$$