CHAPITRE 2 : Critères généraux de la stabilité élastique

OBJECTIF

Établir les critères généraux de la stabilité élastique et de l'équilibre neutre. Il s'agit de préparer le travail de l'utilisation des méthodes énergétiques dans la détermination des charges critiques qui sera vue ultérieurement dans le chapitre 4.

RESUME

La conception d'ensemble d'une structure exige que, sous chargement imposé, la configuration d'équilibre d'une structure soit déterminée et confirmée comme étant stable ; l'étude des problèmes de stabilité se fait généralement en utilisant des critères énergétiques. Dans ce chapitre, on présente le principe du travail virtuel et le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. On établit les critères généraux de l'énergie pour la stabilité élastique qui en découlent, ainsi que la détermination des charges critiques correspondant à l'équilibre neutre. On ne considère que les systèmes parfaitement conservatifs. Les critères établis sont illustrés par deux exemples de base construits à partir de systèmes à barres et à ressorts.

1. INTRODUCTION

La conception générale des structures suppose la détermination des forces d'équilibre interne (moments, cisaillements, etc.) de la structure, sous charge donnée et la confirmation que la structure, sous ces conditions, est stable. Il est fondamental d'être sûr qu'une structure, légèrement écartée de sa position d'équilibre par des forces, des chocs, des vibrations, des imperfections, des contraintes résiduelles, etc. aura tendance à revenir à sa position initiale dès la suppression de la perturbation ; cette caractéristique requise de stabilité élastique est devenue de nos jours de plus en plus critique avec l'usage croissant d'aciers à haute résistance dans des structures de plus en plus légères et élancées.

La théorie de la stabilité élastique (flambement) fournit des méthodes pour déterminer :

- la stabilité d'une configuration d'équilibre,
- la valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique. L'objet de ce chapitre est donc de présenter rapidement à l'étudiant et à l'ingénieur praticien les principes de mécanique nécessaires à la compréhension des critères généraux de la stabilité élastique, de ce fait de donner une meilleure compréhension des méthodes utilisées dans la recherche du flambement, en particulier les méthodes énergétiques étudiées dans le chapitre 4.

La portée de cette leçon (chapitre) se restreint à :

- des chargements conservatifs et des systèmes élastiques adiabatiques (systèmes parfaitement conservatifs),
- des systèmes dont les configurations peuvent être exprimées par des fonctions avec un nombre fini de paramètres de déplacement.

Il faut noter que l'on ne considère que l'aspect statique de la stabilité.

2. GENERALITES

Dans cette leçon, on considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement. Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici q1, q2 ... qn ou plus généralement qi. Une poutre à travée unique peut, bien sûr, avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients q_i de la série de Fourier représentant la flèche: $y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L}$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées représentant les degrés de liberté du système. Si l'on considère la poutre de la figure 1, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des noeuds i et j aux extrémités de la poutre : deux translations u et v et une rotation θ par noeud (dans le plan). On suppose ici que l'ensemble de l'allure de la déformée élastique de la poutre peut être défini en utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation. Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté : $D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j)$.

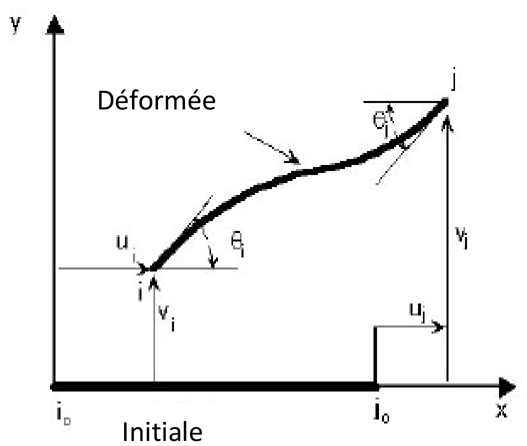

Figure 1. Poutre Généralisée

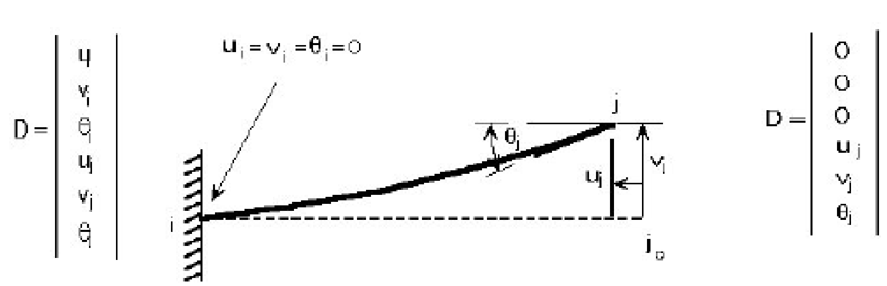

Figure 2. Poutre Console

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions aux variables généralisées. Sur la figure 2, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastrée de la poutre console, d'où les restrictions imposées : $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction, c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure.

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \qquad (1)$$

où : Wext représente le travail créé dû aux forces extérieures au système,

Q représente la quantité de chaleur transmise au système,

ΔT représente l'augmentation de l'énergie cinétique,

ΔU représente l'augmentation de l'énergie interne,

U est souvent appelée énergie de déformation.

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{ext} + W_{int} = \Delta T \qquad (2)$$

où : Wint représente le travail des forces intérieures,

W représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (1) et (2) donnent :

$$Wint = Q - \Delta U \qquad (3)$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques, Q = 0 et l'équation (3) donne:

$$Wint = - \Delta U \qquad (4)$$

N.B. : ΔU n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$$\Delta U = 0 \text{ donc } Wint = 0 \qquad (5)$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) :

$$\Delta T = 0 \tag{6}$$

et les équations (1), (2) et (5) donnent :

$$Wext = \Delta U \tag{7}$$

$$Wext + Wint = 0 \tag{8}$$

3. PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

L'étude des problèmes de stabilité fait généralement appel au principe du travail virtuel, que l'on va voir dans ce paragraphe. <u>Le problème est d'abord de trouver la configuration d'équilibre réel du système, si elle existe, puis ensuite de vérifier si cette configuration est stable.</u>

Un système donné peut prendre un nombre quelconque de configurations déformées compte tenu des limites fixées par les conditions aux limites, mais seule l'une d'elle est la vraie, correspondant à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons que le système soit dans une configuration caractérisée par les coordonnées généralisées q_1, q_2, ... q_n et pour laquelle on recherche l'équilibre.

Supposons que le système soit soumis à des déplacements petits, arbitraires à partir de cette configuration, on ne demandera à ces déplacements que de satisfaire les conditions aux limites, la structure étant soumise à son chargement réel. Les petits déplacements considérés ici ne sont pas nécessairement réels ; ils sont imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, c'est pour cela qu'on les appelle déplacements virtuels ; ces déplacements virtuels sont indépendants du chargement et sont notés ici δq_i.

Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système rigide, les équations (5) et (8) donnent :

$$\delta Wext = 0 \tag{9}$$

où : δWext représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels ; on peut exprimer le Principe du Travail Virtuel de la manière suivante :

« *Un système rigide est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures agissant sur lui <u>est nul</u> dans tout déplacement virtuel qui satisfasse les conditions aux limites* ».

Pour un système déformable, l'équation (7) donne :

$$\delta Wext = \delta U \tag{10}$$

où δU représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel, le Principe du Travail Virtuel peut être exprimé ainsi :

« *Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures <u>est égal à la variation d'énergie de déformation</u>, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites* ».

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (8) :

$$\delta W = \delta Wint + \delta Wext = 0 \tag{11}$$

3.1. Configuration d'équilibre réel

Pour un système ayant un nombre fini de coordonnées généralisées (q_1, q_2 ... q_n), le travail virtuel δW correspondant à un déplacement virtuel à partir d'une configuration (q_1, q_2 ... q_n) vers une configuration voisine ($q_1 + \delta q_1$, ..., $q_n + \delta q_n$) peut être représenté par une forme linéaire des variations des coordonnées, soit :

$$\delta W = Q_i\ \delta q_1 + Q_2\ \delta q_2 + \ldots = \sum_i Q_i\ \delta q_i \quad \text{pour } i = 1, 2, .., n \tag{12}$$

où Q_1, Q_2, ... Q_n représentent des fonctions des coordonnées généralisées q_i et des forces intérieures (pour les systèmes déformables) et extérieures.

Par analogie avec le travail d'une force, les fonctions Q_1, Q_2,... Q_n sont appelées composantes des forces généralisées. Les termes Q_i n'ont pas nécessairement la dimension d'une force et n'ont souvent pas tous la même dimension ; leur dimension est déterminée par le fait que $Q_i\ \delta q_i$ a la dimension d'un travail. Les équations (11) et (12) donnent :

$$\sum_i Q_i\ \delta q_i = 0 \quad \text{pour } i = 1,2, \ldots, n \tag{13}$$

Comme les δq_i sont arbitraires, indépendants des variations de q_i, l'équation (13) implique que:

$$Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

La résolution de ces (n) équations simultanées d'équilibre donne les valeurs des q correspondant à la configuration d'équilibre réel.

4. PRINCIPE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE STATIONNAIRE

Les forces intérieures et extérieures sont toutes conservatives (système parfaitement conservatif). Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \ldots q_n)$ dont la valeur U représente l'énergie de déformation exprimée par l'équation (4). De la même manière, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega\ (q_1, q_2, \ldots q_n)$ dont la valeur Ω représente l'énergie potentielle de ces forces. On peut donc dire que toutes les forces dérivent d'une seule fonction scalaire $V(q_1, q_2, \ldots q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est donnée par l'énergie potentielle totale du système. Cette énergie potentielle totale peut être exprimée par :

$$V = U + \Omega \tag{15}$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = - \delta V \tag{16}$$

où δV représente la variation de l'énergie potentielle totale dans le déplacement virtuel et (11) et (16) donnent :

$$\delta V = 0 \tag{17}$$

L'équation (17) est une traduction analytique du Principe de l'énergie potentielle totale stationnaire qui dit que :

« *De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire* ».

4.1. Configuration d'équilibre réel

Comme $V = V(q_1, q_2, ..., q_n)$, δV peut être exprimé par :

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta q_1}\,\delta q_1 + \frac{\delta V}{\delta q_2}\,\delta q_2 + \ldots = \sum_i \frac{\delta V}{\delta q_i}\,\delta q_i \tag{18}$$

Ici, les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes, de telle sorte que, si $\delta V = 0$, on a :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = 0 \qquad i = 1,2, \ldots, n \tag{19}$$

Le principe fournit alors (n) équations d'équilibre exprimées en termes de charges appliquées et de coordonnées généralisées, à partir desquelles on peut déterminer les valeurs des q_i, définissant la configuration d'équilibre.

Il faut noter que les équations (12), (16), (18) et (19), ajoutées au fait que les valeurs de δq_i sont arbitraires et indépendantes donnent :

$$\frac{\delta V}{\delta q_i} = -Q_i = 0 \qquad i = 1,2, \ldots, n \tag{20}$$

En résumé, il faut noter que, pour des systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel devient le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Le principe est exact et très puissant et peut être utilisé pour développer des méthodes approchées de résolution des problèmes de stabilité en conception générale de structures.