

Chapitre III

ÉCOULEMENTS GRADUELLEMENT VARIÉS

(Courbes de remous)

I. Equation de la surface libre

Le problème qui se pose dans l'étude d'un écoulement graduellement varié est de déterminer la position, x , et la forme, $h(x)$, de la surface libre pour un débit, Q , et une forme géométrique de section, A , donnés (Fig. 3.1).

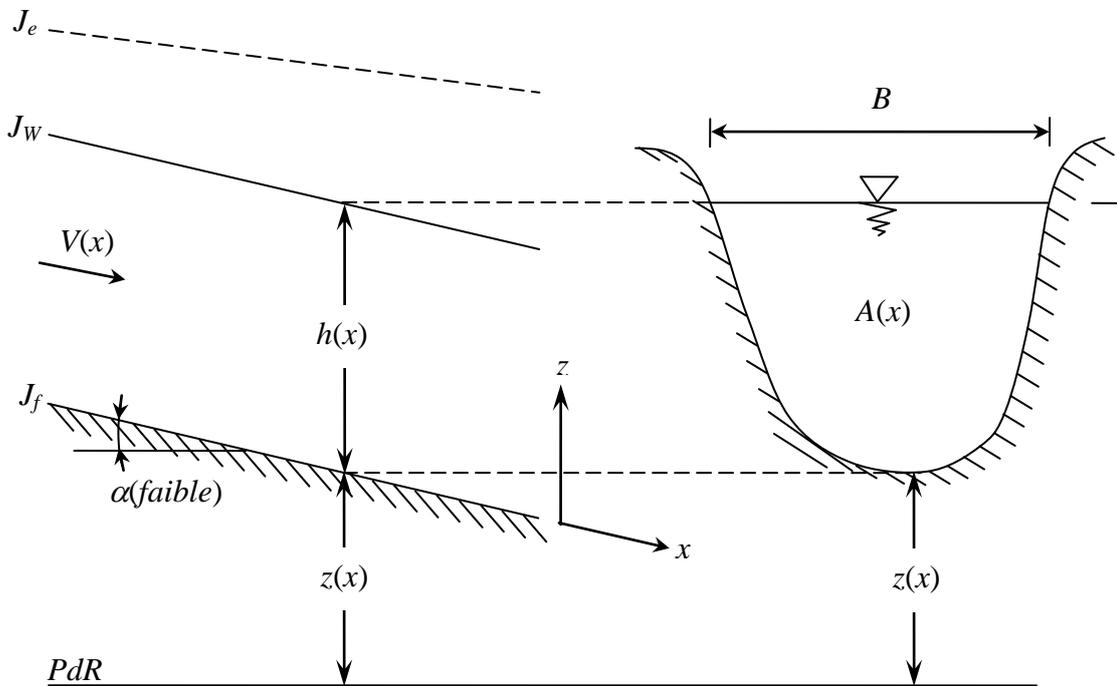


Figure 3.1 : Schéma d'un écoulement permanent et non uniforme sur une pente à fond fixe, $z(x)$.

L'équation différentielle qui permet de déterminer la profondeur d'eau, $h(x)$, en fonction de la distance, x , pour un débit Q , donné, s'écrit :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \frac{(Q/A)^2}{C^2 R_h J_f}}{1 - \frac{(Q/A)^2}{gA/B}} \quad (3.1)$$

Cette équation de l'écoulement graduellement varié, valable pour un canal prismatique, permet de tracer les formes de la surface libre (ligne d'eau) pour les différents cas possibles ; et ceci sans qu'on soit obligé de l'intégrer.

L'équation différentielle (3.1) définit l'inclinaison (pente) par rapport au fond du canal et non pas la pente de la ligne d'eau ; h est la profondeur et non la cote. L'argument dh/dx est positif si la profondeur d'eau, h , croît ; négatif dans le cas contraire.

II. Pente critique

La pente critique d'un canal, quelle qu'en soit sa forme, peut être calculée par :

$$J_c = \frac{gA}{C^2 B R_h} \quad (3.2)$$

Pour un canal rectangulaire de largeur importante, la pente critique est :

$$J_c = \frac{g}{C^2} \quad (3.3)$$

Si : $J_f < J_c \Rightarrow h_n > h_c \Rightarrow$ le canal est dit à faible pente \Rightarrow l'écoulement correspondant à la profondeur normale sera en régime sous – critique ou fluvial.

Si : $J_f > J_c \Rightarrow h_n < h_c \Rightarrow$ le canal est dit à forte pente \Rightarrow l'écoulement uniforme correspondant à la profondeur normale sera en régime sur – critique ou torrentiel.

III. Forme de la surface d'eau

Les courbes intégrales de l'écoulement graduellement varié, équation (3.1), sont données sur la figure 3.2 en fonction de la pente de fond, J_f , et pour un débit, Q , donné.

La classification des courbes (Fig. 3.2) de la ligne d'eau s'organise autour de la pente de fond, J_f , on distingue les cinq cas suivants :

$$J_f < J_c \rightarrow \text{canaux à pente faible : } M.$$

$$J_f > 0 \quad J_f > J_c \rightarrow \text{canaux à pente forte : } S.$$

$$J_f = J_c \rightarrow \text{canaux à pente critique : } C.$$

$$J_f = 0 \quad \rightarrow \text{canaux à pente zéro : } H.$$

$$J_f < 0 \quad \rightarrow \text{canaux à contre – pente : } A.$$

Chaque courbe comporte différentes branches. Une surface d'eau réelle est représentée par une seule branche.

Un principe général, d'une importance majeure, valable pour chaque courbe (et ses branches) doit être respecté :

- L'écoulement sous – critique (fluvial), $IF < 1$, est contrôlé par une singularité en aval (chute brusque, déversoir, etc). Le calcul doit se faire en montant vers l'amont.
- L'écoulement sur – critique (torrentiel), $IF > 1$, est contrôlé par une singularité en amont (chute brusque, vanne, etc). Le calcul doit se faire en descendant vers l'aval.

Conditions Eq. 4.8a	$\frac{h_n}{h}$	Signe num.	$\frac{h_c}{h}$	Signe dén.	Signe $\frac{dh}{dx}$	Changement de profondeur	Nom	Figures échelle verticale exagérée
$J_f > 0$								
$J_f < J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	M1	
$h_n > h_c$	< 1	+	> 1	-	-	pas possible	M2	
	> 1	-	< 1	+	-	décroit	M3	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	M3	$J_f < J_c$
$J_f > 0$								
$J_f > J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	S1	
$h_n < h_c$	< 1	+	> 1	-	-	décroit	S2	
	> 1	-	> 1	-	+	croît	S3	$J_f > J_c$
$J_f > 0$								
$J_f = J_c$	< 1	+	< 1	+	+	croît	C1	
$h_n = h_c$	> 1	-	> 1	-	+	croît	C3	$J_f = J_c$
$J_f = 0$								
$h_n = \infty$		-	< 1	+	-	décroit	H2	
		-	> 1	-	+	croît	H3	$J_f = 0$
$J_f < 0$								
$h_n < 0$	< 1	-	< 1	+	-	décroit	A2	
	< 1	-	> 1	-	+	croît	A3	$J_f < 0$

Figure 3.2 : Surface d'eau de l'écoulement graduellement varié dans un canal à pente.

—▽— surface d'eau ; - - - - profondeur normale ; - - - - profondeur critique

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} \rightarrow \text{Canal rectangulaire de largeur importante.}$$

Dans les exemples donnés sur la figure 3.3, le point de contrôle est toujours indiqué.

IV. Calcul de la surface d'eau

L'intégration de l'équation (3.1) de la surface d'eau est nécessaire pour procéder aux calculs et à la construction exacte des formes de la surface libre.

Quelle que soit la méthode de calcul adoptée, le résultat ne donnera que la ligne d'eau à une constante près. Il est toutefois évident que la position de cette ligne n'est pas arbitraire ; pour la situer, il s'impose alors obligatoirement de connaître l'un de ses points. Ce sera le point de repère, ou de contrôle, marquant la section de contrôle. Le point de contrôle sera généralement calculable à partir des propriétés hydrauliques d'une singularité qui est à l'origine d'un écoulement graduellement varié ; cela peut être une chute, un déversoir ou une vanne.

IV.1. Méthode par approximations successives

L'équation 3.1 a été établie sur la base de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \frac{(Q/A)^2}{2g} + \frac{dh}{dx} - J_f = -J_e = -\frac{(Q/A)^2}{C^2 R_h} \quad (3.4)$$

J_e : pente de la ligne d'énergie.

En multipliant le tout par dx , on a :

$$dh = \left(J_f - \frac{Q^2}{C^2 A^2 R_h} \right) dx - \frac{Q^2}{2g} d \left(\frac{1}{A^2} \right) \quad (3.5)$$

On la transforme ensuite en passant des différentielles aux différences finies :

$$(h_{i+1} - h_i) = \left(J_f - \frac{Q^2}{\bar{C}^2 \bar{A}^2 \bar{R}_h} \right) (x_{i+1} - x_i) - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_{i+1}^2} - \frac{1}{A_i^2} \right) \quad (3.6)$$

La profondeur d'eau, h_i , apparaît à l'abscisse, x_i , tandis que la profondeur d'eau très proche, h_{i+1} , à l'abscisse, x_{i+1} , très proche (Fig. 3.4).

Les valeurs, \bar{C} , \bar{A} et \bar{R}_h , correspondent à la valeur moyenne de la profondeur d'eau supposée : $\bar{h} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$.

La relation (3.6) peut aussi s'écrire ainsi :

$$(h + z)_{i+1} - (h + z)_i = \left(-\frac{Q^2}{\bar{C}^2 \bar{A}^2 \bar{R}_h} \right) (x_{i+1} - x_i) - \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_{i+1}^2} - \frac{1}{A_i^2} \right) \quad (3.7)$$

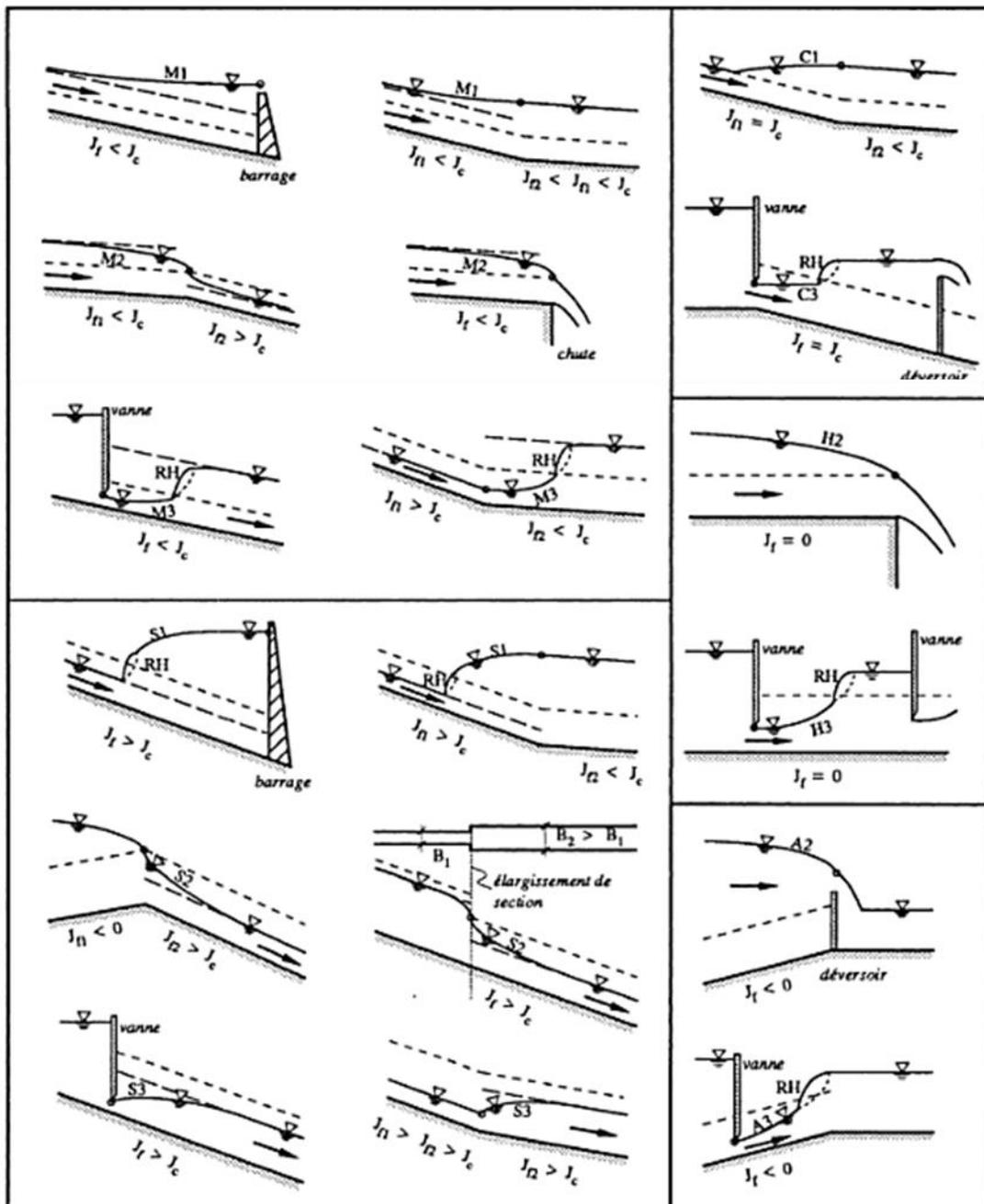


Figure 3.3 : Quelques exemples d'écoulement.

o section de contrôle ; RH ressaut hydraulique

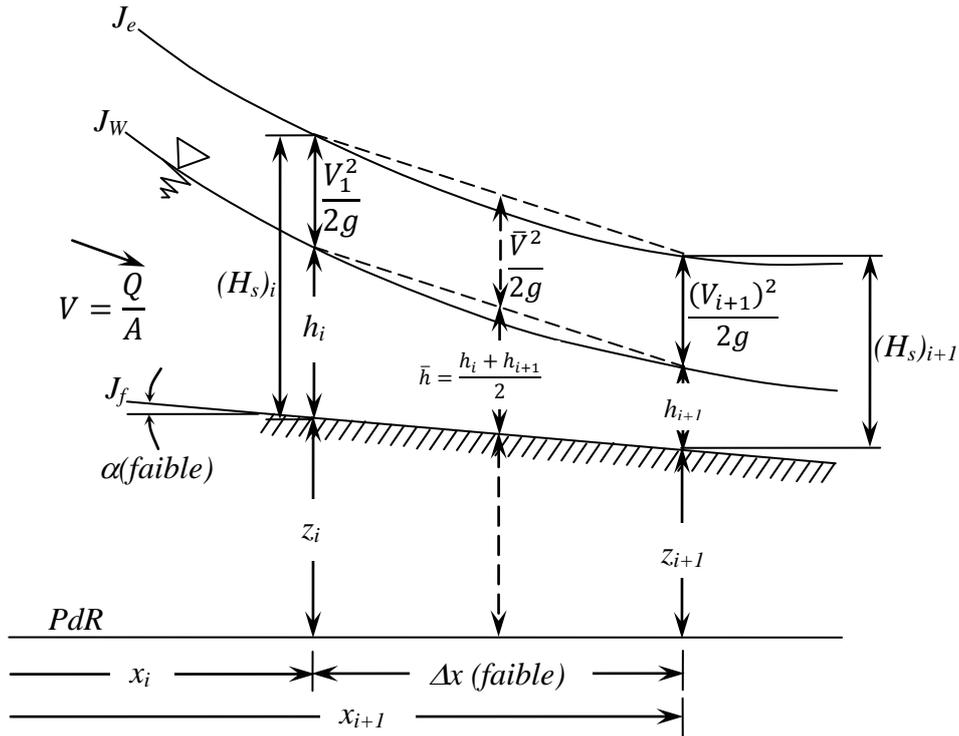


Figure 3.4 : Schéma d'écoulement non uniforme entre deux sections.

Les deux formes de l'équation de mouvement (3.6) et (3.7) sont valables pour les canaux prismatiques et pour les canaux non prismatiques, donc également pour les cours d'eau.

Pour les canaux prismatiques, on peut également écrire la relation (3.4) ainsi :

$$\frac{d}{dx}(H_s) = J_f - J_e \quad (3.8)$$

Où : $H_s = \left(h + \frac{V^2}{2g} \right)$ est la charge spécifique.

$$(H_s)_{i+1} + (H_s)_i = \left(J_f - \frac{\bar{V}^2}{C^2 R_h} \right) (x_{i+1} - x_i) \quad (3.9)$$

Où \bar{V} est relevé pour la valeur moyenne supposée.

Les équations développées précédemment peuvent être utilisées comme suit pour tracer la surface d'eau :

- Pour un tronçon de faible distance, $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$, donnée arbitrairement, on trace la variation, $\Delta h = (h_{i+1} - h_i)$; c'est la méthode des tronçons.
- Pour une légère différence de profondeur, $\Delta h = (h_{i+1} - h_i)$, donnée, on trace la distance, $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$, entre deux profondeurs ; c'est la méthode des variations de profondeur.

- Avant de pouvoir commencer les calculs, il faut établir un (des) point(s) de contrôle, où il existe une relation définitive entre le débit et la profondeur d'eau. Un point de contrôle peut être établi dans une section telle que l'entrée ou la sortie d'un canal, un déversoir, une vanne ou une chute (brusque).
- Les calculs se font en se dirigeant vers l'amont pour l'écoulement sous – critique (fluvial), $IF < 1$, et vers l'aval pour l'écoulement sur – critique (torrentiel), $IF > 1$.
- Les méthodes par approximations successives sont en général les plus longues à appliquer, mais souvent aussi les plus précises.

IV.1.1. Méthode des tronçons (Δx est fixée)

Cette méthode par approximations successives s'applique à l'équation du mouvement sous la forme de l'équation (3.6) ou de l'équation (3.9).

On suppose connaître une profondeur d'eau, h_i , à une abscisse, x_i .

On cherche la profondeur, h_{i+1} , à l'abscisse, x_{i+1} , très proche.

On choisit une première valeur, h'_{i+1} , d'où A'_{i+1} .

On calcule les valeurs, \bar{C} , \bar{A} et \bar{R}_h , ou \bar{V} , qui correspondent toutes à la valeur moyenne supposée, $\bar{h} = (h_i + h'_{i+1})/2$.

On porte ces valeurs dans l'équation aux différences, la relation (3.6) ou la relation (3.9), où J_f est la pente de fond du tronçon.

On obtient ainsi une valeur pour la profondeur, h_{i+1} , qui sera probablement différente de la valeur choisie, h'_{i+1} .

On recommence par approximations successives jusqu'à ce que la valeur, h_{i+1} , donnée par cette équation soit égale à la dernière valeur choisie, h'_{i+1} , h''_{i+1} , h'''_{i+1}

....

On passera ensuite au tronçon suivant, etc.

La méthode (implicite) des tronçons ou à pas standard, est générale, donc valable pour les canaux prismatiques, relation (3.9), et les canaux non prismatiques, relation (3.6), d'où la section varie d'un tronçon à l'autre.

Pour les cours d'eau naturels on utilise la relation suivante :

$$\left(h + z + \frac{Q^2}{2gA^2} \right)_{i+1} - \left(h + z + \frac{Q^2}{2gA^2} \right)_i = -\frac{Q^2}{\bar{C}^2 \bar{A}^2 \bar{R} \bar{h}} (x_{i+1} - x_i) - K_{ss} \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{A_{i+1}^2} - \frac{1}{A_i^2} \right) \quad (3.10)$$

K_{ss} : coefficient de perte de charge singulière provoquée par un changement entre les sections, A_i et A_{i+1} , et par d'autres irrégularités.

$K_{ss} = 0 \rightarrow$ écoulement accéléré.

$0 < K_{ss} < 1 \rightarrow$ écoulement décéléré.

IV.1.2. Méthode des variations de profondeur (Δh est fixée)

Cette méthode à pas directs s'applique également à l'équation du mouvement sous la forme de la relation (3.6) et de la relation (3.9).

On suppose connaître la profondeur d'eau, h_i , à une abscisse, x_i .

On choisit la valeur, h_{i+1} , qui est légèrement différente de la valeur, h_i . Pour réduire les erreurs, il convient de resserrer la variation des profondeurs, h_{i+1} et h_i .

On calcule l'abscisse, x_{i+1} , par l'équation (3.6) ou l'équation (3.9).

On passera ensuite au tronçon suivant, etc.

Il faut signaler que cette méthode (explicite) est très efficace et moins longue et compliquée que la méthode des tronçons.

IV.2. Méthode par intégration directe

L'équation différentielle de mouvement (3.1) peut s'écrire :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 \frac{J_f}{J_c}} \quad (3.11)$$

Où $K(h)$ est la débitance :

$$K(h) = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \quad (3.12)$$

Pour l'écoulement uniforme, cette relation prend la valeur suivante :

$$K_n(h) = Q / \sqrt{J_f} \quad (3.13)$$

Le calcul et le tracé de la surface d'eau exigent l'intégration de l'expression différentielle (2.11). Les variables sont l'abscisse, x , et la profondeur d'eau, h , correspondante.

La relation (2.11) s'écrit :

$$dx = f(h). dh \quad (2.14)$$

Par intégration entre deux sections, x_i et x_{i+1} , on obtient :

$$x_i - x_{i+1} = \int_{h_{i+1}}^{h_i} f(h). dh \quad (2.15)$$

L'intégration de la relation (3.15) permet le traçage de la surface d'eau. Trois méthodes sont, alors, présentées ici.

IV.2.1. Méthode de *Bresse* (Canal rectangulaire large)

Pour un canal rectangulaire de largeur infinie – où $h \cong R_h$, $q = \frac{Q}{B}$ et $B = \frac{A}{h}$ –, on écrit par définition la profondeur normale :

$$h_n^3 = \frac{q^2}{C^2 J_f} \quad (3.16)$$

Et la profondeur critique :

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g} \quad (3.17)$$

La débitance, K , du canal est donnée par :

$$K^2 = C^2 R_h A^2 = C^2 h^3 B^2 \quad (3.18)$$

En conséquence, on a ensuite :

$$\left(\frac{h_c}{h_n}\right)^3 = \frac{C^2 J_f}{g} \quad \text{et} \quad \left(\frac{K_n}{K}\right)^2 = \left(\frac{h_n}{h}\right)^3 \quad (2.19)$$

Le coefficient de *Chézy*, C , étant constant. La pente critique est donnée par :

$$J_c = \frac{g}{C^2} = J_f \left(\frac{h_n}{h_c}\right)^3 \quad (3.20)$$

L'équation différentielle (3.11) s'écrit alors :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^3 \frac{J_f}{J_c}} \quad (3.21)$$

Avec la relation pour la pente critique (3.20), on obtient :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^3}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} \quad (3.22)$$

C'est l'équation de *Bresse* valable pour un canal rectangulaire de largeur infinie.

En posant : $\frac{h}{h_n} = \eta$ et $dh = h_n d\eta$.

On écrit la relation (2.22) comme suit :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{h_c}{h_n}\right)^3}{\eta^3 - 1} \right] h_n \cdot d\eta \quad (3.23)$$

En intégrant cette relation entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , à des profondeurs, h_i et h_{i+1} , on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (h_i - h_{i+1}) - \left[1 - \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^3 \right] [\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1})] \right\} \quad (3.24)$$

Avec l'intégrale de *Bresse* :

$$\Phi(\eta, 3) = - \int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} \quad (3.25)$$

L'expression de cette fonction, $\Phi(\eta, 3)$, est donnée dans le tableau 3.1 pour $N = 3$; N est l'exposant hydraulique dans la relation (3.19).

La méthode de *Bresse* est simple et rapide, mais elle se limite aux cours d'eau avec un lit très large par rapport à la profondeur ; il est préférable d'utiliser la profondeur moyenne, $H_h \cong R_h$, plutôt que la profondeur maximale.

IV.2.2. Méthode de *Bakhmeteff*

Alors que la méthode de *Bresse* est limitée à des canaux rectangulaires de largeur infinie, celle de *Bakhmeteff* est l'une des méthodes les plus utilisées pour les canaux à section transversale quelconque.

Pour un tel canal, la débitance, K , est donnée par :

$$K(h) = f(h) \quad (3.26)$$

Qu'on peut exprimer par une relation exponentielle :

$$K^2 = C^2 R_h A^2 = C^{te} \cdot h^N.$$

Ce qui donne le rapport de :

$$\left(\frac{K}{K_n} \right)^2 = \frac{C^2 R_h A^2}{(C^2 R_h A^2)_n} = \left(\frac{h}{h_n} \right)^N \quad (3.27)$$

On appelle l'exposant, N , exposant hydraulique, qui est à déterminer pour chaque forme de canal. Voici des valeurs indicatives pour les formes suivantes :

- $B \ll h \rightarrow N = 2,0.$
- Forme rectangulaire $B = 2h \rightarrow N = 2,5.$
- $B = \infty \rightarrow N = 3,0.$
- Forme trapézoïdale $3,0 < N < 4,0.$
- Forme triangulaire $5,3 < N < 5,5.$
- Forme parabolique $N = 4,0.$

Tableau 3.1 : Fonctions pour les écoulements graduellement variés.

$$\Phi(\eta, N) = - \int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^{N-1}}$$

La constante de l'intégration est ajustée pour $\Phi(0, N) = 0$ et $\Phi(\infty, N) = 0$

$\eta \backslash N$	2.8	3.0	3.2	3.6	4.0	5.0
0.10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
0.20	0.201	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.30	0.303	0.302	0.302	0.301	0.300	0.300
0.40	0.408	0.407	0.405	0.403	0.402	0.401
0.44	0.452	0.450	0.448	0.445	0.443	0.441
0.48	0.497	0.494	0.492	0.488	0.485	0.482
0.52	0.544	0.540	0.536	0.531	0.528	0.523
0.56	0.593	0.587	0.583	0.576	0.572	0.565
0.58	0.618	0.612	0.607	0.599	0.594	0.587
0.60	0.644	0.637	0.631	0.623	0.617	0.608
0.61	0.657	0.650	0.644	0.635	0.628	0.619
0.62	0.671	0.663	0.657	0.647	0.640	0.630
0.63	0.684	0.676	0.669	0.659	0.652	0.641
0.64	0.698	0.690	0.683	0.672	0.664	0.652
0.65	0.712	0.703	0.696	0.684	0.676	0.663
0.66	0.727	0.717	0.709	0.697	0.688	0.675
0.67	0.742	0.731	0.723	0.710	0.701	0.686
0.68	0.757	0.746	0.737	0.723	0.713	0.698
0.69	0.772	0.761	0.751	0.737	0.726	0.710
0.70	0.787	0.776	0.766	0.750	0.739	0.722
0.71	0.804	0.791	0.781	0.764	0.752	0.734
0.72	0.820	0.807	0.796	0.779	0.766	0.746
0.73	0.837	0.823	0.811	0.793	0.780	0.759
0.74	0.854	0.840	0.827	0.808	0.794	0.771
0.75	0.872	0.857	0.844	0.823	0.808	0.784
0.76	0.890	0.874	0.861	0.839	0.823	0.798
0.77	0.909	0.892	0.878	0.855	0.838	0.811
0.78	0.929	0.911	0.896	0.872	0.854	0.825
0.79	0.949	0.930	0.914	0.889	0.870	0.839
0.80	0.970	0.950	0.934	0.907	0.887	0.854
0.81	0.992	0.971	0.954	0.925	0.904	0.869
0.82	1.015	0.993	0.974	0.945	0.922	0.885
0.83	1.039	1.016	0.996	0.965	0.940	0.901
0.84	1.064	1.040	1.019	0.985	0.960	0.918
0.85	1.091	1.065	1.043	1.007	0.980	0.935
0.86	1.119	1.092	1.068	1.031	1.002	0.954
0.87	1.149	1.120	1.095	1.055	1.025	0.973
0.88	1.181	1.151	1.124	1.081	1.049	0.994
0.89	1.216	1.183	1.155	1.110	1.075	1.015
0.90	1.253	1.218	1.189	1.140	1.103	1.039
0.91	1.294	1.257	1.225	1.173	1.133	1.064
0.92	1.340	1.300	1.266	1.210	1.166	1.092
0.93	1.391	1.348	1.311	1.251	1.204	1.123
0.94	1.449	1.403	1.363	1.297	1.246	1.158
0.95	1.518	1.467	1.423	1.352	1.296	1.199
0.96	1.601	1.545	1.497	1.417	1.355	1.248
0.97	1.707	1.644	1.590	1.501	1.431	1.310
0.98	1.855	1.783	1.720	1.617	1.536	1.395
0.99	2.106	2.017	1.940	1.814	1.714	1.537
0.995	2.355	2.250	2.159	2.006	1.889	1.678

$\eta \backslash N$	2.8	3.0	3.2	3.6	4.0	5.0
1.005	1.818	1.649	1.506	1.279	1.107	0.817
1.01	1.572	1.419	1.291	1.089	0.936	0.681
1.02	1.327	1.191	1.078	0.900	0.766	0.546
1.03	1.186	1.060	0.955	0.790	0.668	0.469
1.04	1.086	0.967	0.868	0.714	0.600	0.415
1.05	1.010	0.896	0.802	0.656	0.548	0.374
1.06	0.948	0.838	0.748	0.608	0.506	0.342
1.07	0.896	0.790	0.703	0.569	0.471	0.315
1.08	0.851	0.749	0.665	0.535	0.441	0.292
1.09	0.812	0.713	0.631	0.506	0.415	0.272
1.10	0.777	0.681	0.601	0.480	0.392	0.254
1.11	0.746	0.652	0.575	0.457	0.372	0.239
1.12	0.718	0.626	0.551	0.436	0.354	0.225
1.13	0.692	0.602	0.529	0.417	0.337	0.212
1.14	0.669	0.581	0.509	0.400	0.322	0.201
1.15	0.647	0.561	0.490	0.384	0.308	0.191
1.16	0.627	0.542	0.473	0.369	0.295	0.181
1.17	0.608	0.525	0.458	0.356	0.283	0.173
1.18	0.591	0.509	0.443	0.343	0.272	0.165
1.19	0.574	0.494	0.429	0.331	0.262	0.157
1.20	0.559	0.480	0.416	0.320	0.252	0.150
1.22	0.531	0.454	0.392	0.299	0.235	0.138
1.24	0.505	0.431	0.371	0.281	0.219	0.127
1.26	0.482	0.410	0.351	0.265	0.205	0.117
1.28	0.461	0.391	0.334	0.250	0.193	0.108
1.30	0.442	0.373	0.318	0.237	0.181	0.100
1.32	0.424	0.357	0.304	0.225	0.171	0.093
1.34	0.408	0.342	0.290	0.214	0.162	0.087
1.36	0.393	0.329	0.278	0.204	0.153	0.081
1.38	0.378	0.316	0.266	0.194	0.145	0.076
1.40	0.365	0.304	0.256	0.185	0.138	0.071
1.42	0.353	0.293	0.246	0.177	0.131	0.067
1.44	0.341	0.282	0.236	0.169	0.125	0.063
1.46	0.330	0.273	0.227	0.162	0.119	0.059
1.48	0.320	0.263	0.219	0.156	0.113	0.056
1.50	0.310	0.255	0.211	0.149	0.108	0.053
1.60	0.269	0.218	0.179	0.123	0.087	0.040
1.70	0.236	0.189	0.153	0.103	0.072	0.031
1.80	0.209	0.166	0.133	0.088	0.060	0.024
1.90	0.188	0.147	0.117	0.076	0.050	0.020
2.00	0.169	0.132	0.104	0.066	0.043	0.016
2.20	0.141	0.107	0.083	0.051	0.032	0.011
2.40	0.119	0.089	0.068	0.040	0.024	0.008
2.60	0.102	0.076	0.057	0.033	0.019	0.005
2.80	0.089	0.065	0.048	0.027	0.015	0.004
3.00	0.078	0.056	0.041	0.022	0.012	0.003
3.50	0.059	0.041	0.029	0.015	0.008	0.002
4.00	0.046	0.031	0.022	0.010	0.005	0.001
5.00	0.031	0.020	0.013	0.006	0.003	0.000
10.00	0.009	0.005	0.003	0.001	0.000	0.000

On notera que la forme parabolique peut bien servir comme approximation pour un cours d'eau.

On suppose que le rapport (voir équation 3.2) de :

$$\frac{J_f}{J_c} = \beta = J_f \frac{C^2 B R_h}{gA}$$

Varie peu en fonction de la profondeur d'eau, h ; par conséquent, il peut être considéré comme une constante dans un tronçon.

L'équation différentielle (3.11), s'écrit alors :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N}{1 - \beta \left(\frac{h_n}{h}\right)^N} \quad (3.28)$$

Cette relation est l'équation de *Bakhmeteff* (1912) valable pour un canal de forme quelconque qui est défini par l'exposant hydraulique.

En posant : $\frac{h}{h_n} = \eta$ et $dh = h_n d\eta$.

On écrit la relation (3.28), comme suit :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\eta^N - 1} \right] h_n \cdot d\eta \quad (3.29)$$

En intégrant cette relation entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , et en admettant β et N comme constantes, on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - (1 - \beta) [\Phi(\eta_i) - \Phi(\eta_{i+1})] \} \quad (3.30)$$

Avec l'intégrale :

$$\Phi(\eta, N) = - \int \frac{d\eta}{\eta^N - 1} \quad (3.31)$$

Bakhmeteff a fourni des tableaux donnant les valeurs de $\Phi(\eta, N)$ pour différentes valeurs habituelles de N (voir tableau 3.1).

IV.2.3. Méthode de Chow

La méthode de *Chow* (1959) admet que le ratio, β , n'est plus constant. L'équation différentielle (3.22), peut être généralisée en posant :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^N}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^M} \quad (3.32)$$

M : est le deuxième exposant hydraulique. Pour une section de forme quelconque, *Chow* donne :

$$N(h) = \frac{2h}{3A} \left(5B - 2R_h \frac{dp}{dh} \right) \quad (3.33)$$

$$M(h) = \frac{h}{A} \left(3B - \frac{A}{B} \frac{dB}{dh} \right)$$

Les variations usuelles de N et M sont : $2,0 < N < 5,3$ et $3 < M < 4,8$.

En posant : $\frac{h}{h_n} = \eta$ et $dh = h_n d\eta$.

La relation (3.32) peut être exprimée par :

$$dx = \frac{1}{J_f} \left[1 - \left(\frac{1}{1 - \eta^N} \right) + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \left(\frac{\eta^{N-M}}{1 - \eta^N} \right) \right] h_n \cdot d\eta \quad (3.34)$$

En intégrant entre deux sections d'abscisses, x_i et x_{i+1} , on obtient :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - \int_0^{\eta_i} \left(\frac{1}{1 - \eta^N} \right) d\eta + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \int_0^{\eta_i} \left(\frac{\eta^{N-M}}{1 - \eta^N} \right) d\eta \right\} \quad (3.35)$$

La première intégrale est :

$$\Phi(\eta, N) = \int \left(\frac{1}{1 - \eta^N} \right) d\eta = - \int \left(\frac{1}{\eta^N - 1} \right) d\eta \quad (3.31)$$

étant identique à celle qu'on trouve dans la relation de *Bakhmeteff* (3.30).

la deuxième intégrale :

$$\int_0^{\eta} \left(\frac{\eta^{N-M}}{1 - \eta^N} \right) d\eta = \frac{1}{N} \int_0^{\zeta} \left(\frac{1}{1 - \zeta^J} \right) d\zeta = \frac{J}{N} \Phi(\zeta, J) \quad (3.36)$$

Où : $\zeta = \eta^{N/J}$ et $J = \frac{N}{(N-M+1)}$. La fonction, $\Phi(\zeta, J)$, est semblable à la fonction, $\Phi(\eta, N)$;

les variables, η et N , sont remplacées par les variables, ζ et J ; on utilise donc le tableau 3.1 pour les deux fonctions, relations (3.31) et (3.36).

Avec la définition de ces deux fonctions, la relation (3.35) s'écrit ainsi :

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{h_n}{J_f} \left\{ (\eta_i - \eta_{i+1}) - [\Phi(\eta_i, N) - \Phi(\eta_{i+1}, N)] + \left(\frac{h_c}{h_n} \right)^M \frac{J}{N} [\Phi(\zeta_i, J) - \Phi(\zeta_{i+1}, J)] \right\} \quad (3.37)$$

IV.3. Méthode par intégration graphique

L'équation du mouvement pour un canal prismatique de section quelconque s'écrit dans sa forme générale :

$$\frac{dh}{dx} = J_f \frac{1 - \frac{(Q/A)^2}{C^2 R_h J_f}}{1 - \frac{(Q/A)^2}{gA/B}} \quad (3.1)$$

Cette équation prend une forme simplifiée qu'on peut écrire ainsi :

$$dx = f(h) \cdot dh \quad (3.38)$$

La fonction, $f(h)$, a une forme qu'il est en général difficile d'intégrer. Les paramètres $A(h)$, $R_h(h)$, $B(h)$ et $C(h)$ ne peuvent pas être exprimés au moyen d'une fonction analytique simple de la profondeur d'eau, h .

Parmi les méthodes graphiques, on distingue la méthode directe. La méthode directe peut être appliquée en suivant les étapes suivantes :

- On calcule et on établit la fonction, $f(h_i)$, pour différentes valeurs de la profondeur, h_i .
- On trace (voir figure 3.5) cette courbe de $f(h)$ en fonction de h .

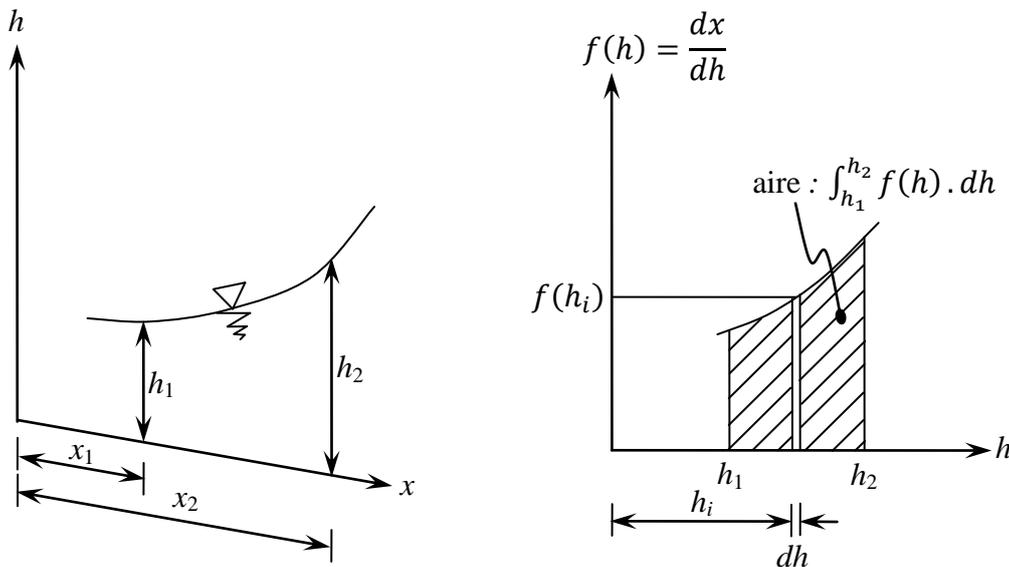


Figure 3.5 : Schéma de la méthode par intégration graphique.

L'aire comprise entre cette courbe, $f(h)$, l'axe des h et les deux droites d'abscisses, h_1 et h_2 , donne la distance, $(x_2 - x_1)$, entre les deux sections. On l'écrit :

$$(x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{h_1}^{h_2} f(h) dh \quad (3.39)$$

Cette méthode est également utile pour les canaux non prismatiques.