Module de Pobabilités 2
Chapitre 3 : processus de Poisson
Séance 10

Responsable du cours: Dr. **Metiri Farouk,**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Mail address: fmetiri@yahoo.fr

Section 3.4: Processus de Poisson non homogène

Nous avons constaté dans la section précédente que le processus des arrivées de clients à un guichet peut être modélisé, dans une certaine mesure, par un processus de Poisson homogène. Or, il faut constater que le flux des arrivées est plus important à certaines heures de la journée et à l'inverse moins tendu sur d'autres plages horaires. Dans ce cas, l'intensité du processus subit une modification en fonction du temps. De ce fait, pour être plus proche de la réalité, le modèle poissonien homogène doit être adapté de sorte que son intensité évolue en fonction du temps. On peut considérer par exemple une intensité égale à λ_1 sur l'intervalle $[0, t_1[$, puis λ_2 sur l'intervalle $[t_1, t_2[\ldots,$ avec $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots.$

Cet exemple montre qu'il faut s'affranchir de l'hypothèse de stationnarité des accroissements du processus de Poisson homogène. Elle est remplacée par une condition de continuité de la fonction moyenne.

Un processus de Poisson non homogène **(non- stationnaire)** est un processus de Poisson **dont le taux de saut n'est plus constant mais dépend du temps :** $\lambda(t)$.

Définition: Un processus de comptage $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson non homogène d'intensité $(\lambda(t))_{t\geq 0}$ s'il vérifie les conditions suivantes:

- $N(0) = 0$
- N a des accroissements indépendants, mais ils ne sont plus stationnaires (i.e. le temp d'attente entre deux sinistres n'est plus forcément une loi exponentielle).
- Si on regarde les sauts sur un petit accroissement de temps, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} P\left(N\left(t+h\right) - N(t) = 1\right) &= \lambda\left(t\right) \; et \\
\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} P\left(N\left(t+h\right) - N(t) \geq 2\right) &= 0
\end{aligned}$$

La fonction $\lambda(t)$ dont il est question dans la définition est la fonction d'intensité du processus. Lorsqu'elle est constante, il s'agit simplement d'un processus de base (homogène). Dans le cas d'un processus homogène, l'espérance satisfait l'équation
$E[N(t)] = \lambda t = \int_0^t \lambda dy$
. Dans le cas d'un processus de Poisson non homogène, cette équation n'est plus valable. On introduit alors la fonction moyenne $m(t)$ définie par:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$$

Très souvent, et ce sera le cas ici, la fonction $m(t)$ est supposée continue et différentiable. étant donné que la fonction d'intensité $\lambda(t)$ est positive, la fonction moyenne est positive et non-décroissante.
Les deux figures ci-dessous donnent la représentation d'une trajectoire de deux processus de Poisson non homogènes dont les fonctions d'intensité sont respectivement les fonctions $\lambda(t) = 3t$ et $\lambda(t) = 15t$. Dans les deux cas, les événements se succèdent plus vite lorsque le temps augmente.

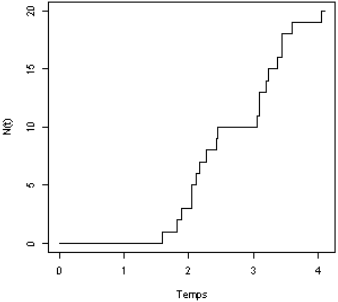


Figure: Trajectoire avec $\lambda(t) = 3t$

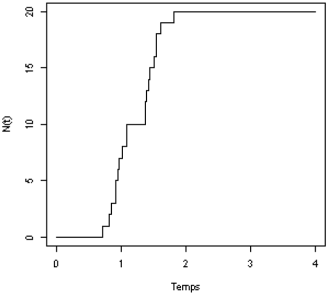


Figure: Trajectoire pour $\lambda(t) = 15t$

Remarques:

La fonction d'intensité peut prendre plusieurs formes:

(1) Fonction d'intensité linéairement croissante:

Il faut considérer une fonction d'intensité dépendante du temps (sinon le processus est homogène) ; prenons le cas très simple d'une fonction linéaire pour commencer. Posons donc

$$\lambda(t) = ct, \text{ avec } c > 0, \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas,

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy = \int_0^t cy dy = c\frac{t^2}{2}, \forall t \geq 0.$$

Ce deux fonctions sont représentées aux figures 3.3 et 3.4:

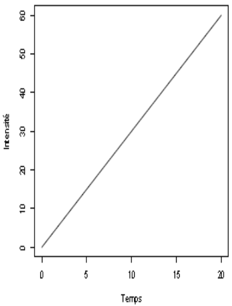


FIG. 3.3 – Intensité linéaire

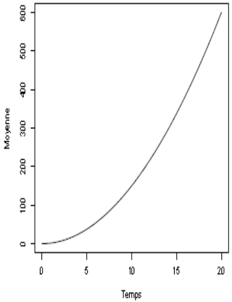
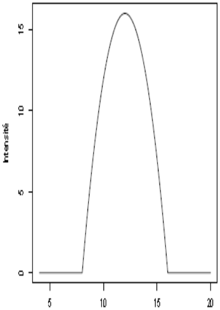


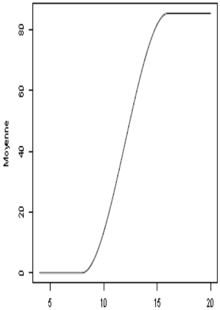
FIG. 3.4 – Moyenne linéaire

(2) Fonction d'intensité parabolique:
C'est le cas de la cafétéria, ou de tout autre service de repas, qui connaît un pic d'intensité à midi.

$$\lambda(t) = at^2 + bt + c\|_{\{t\geq 0: at^2+bt+c\geq 0\}}, \text{ avec } a < 0, \forall t \geq 0.$$

La figure 3.5 montre la forme de cette fonction d'intensité. Ici, la fonction $m(t)$ n'augmente pas indéfiniment, elle est croissante jusqu'en un temps t_1 tel que $\lambda(t) = 0 \ \forall t \geq t_1$ où elle devient stationnaire comme cela est illustré à la figure 3.6.





(3) Fonction d'intensité exponentiellement décroissante
Un exemple d'utilité de cette fonction est la modélisation de l'intensité des décès causés par les accidents de la route.

$$\lambda(t) = \alpha e^{-\beta t}, \text{ avec } \alpha, \beta > 0, \forall t \geq 0.$$

La **figure 3.7** montre la forme de cette fonction d'intensité.

$$m(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right), \forall t \geq 0.$$

Où

$$\lim_{t \longrightarrow 0} m(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} m(t) = \frac{\alpha}{\beta}$$

La figure 3.8 nous donne la forme de cette fonction.

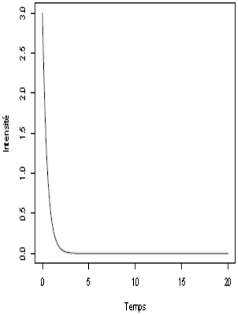


FIG. 3.7 – Intensité exponentiellement dé-croissante

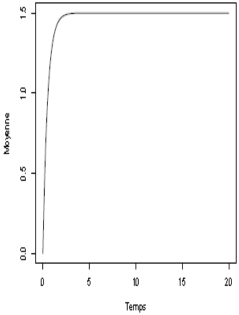


FIG. 3.8 – Moyenne exponentiellement dé-croissante

Propriétés:

(1) Si $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson non homogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$, alors:

$$P\left(N(t+s)-N(t)=k\right)=\frac{\left(m(t+s)-m(t)\right)^{k}}{k!}e^{-(m(t+s)-m(t))},\ \forall t,s>0,\ k\in$$

Autrement dit, $N(t+s)-N(t)\sim Poisson(m(t+s)-m(t))$

(2) Si $(N^1(t))_{t\geq 0}$ et $(N^2(t))_{t\geq 0}$ sont deux processus de Poisson non homogènes d'intensité respectives $\left(\lambda^1(t)\right)_{t\geq 0}$ et $\left(\lambda^2(t)\right)_{t\geq 0}$, alors $(N(t))_{t\geq 0}$ avec $N(t)=N^1(t)+N^2(t)$ est un processus de Poisson non homogène d'intensité $\left(\lambda^1(t)+\lambda^2(t)\right)_{t\geq 0}$.

(3) Sans l'hypothèse de stationnarité des accroissements, la distribution des temps d'interarrivées (durées d'attente) n'est plus forcément exponentielle. Lorsque l'on connaît l'instant t_{n-1} auquel la dernière occurrence a eu lieu, la forme de la fonction de répartition de X_n est assez directe.
Dans ce cas,

$$\begin{aligned} F_{X_n}(t) &= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-m(t+s)} \lambda\,(t+s)\,\lambda(s) \frac{[m(s)]^{n-2}}{(n-2)!} ds, \forall t \geq 0. \\ f_{X_n}(t) &= \int_0^{+\infty} e^{-m(t+s)} \lambda(s) \frac{[m(s)]^{n-2}}{(n-2)!} ds. \end{aligned}$$

Comme cette distribution dépend de n, on a perdu le caractère **"identiquement distribué"** des temps d'inter-arrivées X_n, cependant, les X_n restent des v.a indépendantes.

(4) La loi conditionnelle du processus de Poisson non homogène en fonction du nombre de sauts est:

$$f_{(T_1,T_2,...,T_n|N(t)=n)}(t_1,t_2,...,t_n) = \begin{cases} \frac{n!}{[m(t)]^n}\Pi_{i=1}^{n}\lambda(t_i) \text{ si } 0 \le t_1 \le ... \le t_n \le t \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.3:

Pour modéliser l'arrivée des clients dans une administration, on utilise un processus de poisson d'intensité $\lambda(t)$. On peut imaginer que les arrivées sont d'abord espacées, puis qu'en milieu de journée le rythme augmente, pour décroitre ensuite. L'intensité du processus est donnée par la fonction suivante:

$$\lambda(t) = \begin{cases} t(6-t) = 6t - t^2 \text{ si } 0 \leq t \leq 6 \\ 0 \text{ si } t > 6 \end{cases}$$

- Déterminer le nombre moyen de clients qui arrivent à cette administration.

Exercice 3.4:
Un restaurant au centre-ville ouvre à **10h00**. De **10h00** à **11h00**, les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité **3** par heure. De **11h00** à **14h00**, l'intensité est de **15** par heure. De **14h00** à **16h00**, l'intensité décroît de **10** par heure (à **14h00**) jusqu'à **8** par heure (**16h00**). De **16h00** à **19h00**, les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité **3** par heure. Entre **19h00** et **21h00**,l'intensité croît de **8** par heure jusqu'à **10** par heure à **21h00**.
– On veut connaitre **le nombre moyen** de clients qui sont servis dans le restaurant ce jour.

Solution 3.3:

Nous avons ici un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$, Calculer le nombre moyen de clients revient a chercher la fonction moyenne $m\,(t)$.

$$m\,(t) = E\,(N_t) = \int_0^6 6t - t^2 dt = \left[3t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^6 = 192 - 72 = 120 \text{ clients.}$$

Solution 3.4:

On note N_i les processus de Poisson associés à chaque période. Le nombre $N(t)$ de clients entrant avant l'instant t est un processus de Poisson non homogène.

– On souhaite évaluer:

$$\begin{aligned} E\left[N\left(21\right)-N\left(10\right)\right] &= E[N_1(11)-N_1(10)]+E[N_2(14)-N_2(11)]+ \\ &\quad E[N_3(16)-N_3(14)]+E[N_4(16)-N_4(19)]+ \\ &\quad E[N_5(21)-N_5(19)]. \end{aligned}$$

N_1 est un Processus de Poisson d'intensité 3, donc
$N_1(11)-N_1(10)\sim P(3.1)$ et $E[N_1(11)-N_1(10)]=3$ clients.
N_2 est un Processus de Poisson d'intensité 15, donc
$N_2(14)-N_2(11)\sim P(15.3)$ et $E[N_2(14)-N_2(11)]=45$ clients.
N_3 est un Processus de Poisson d'intensité $10+(14-t)=24-t$.

L'intensité correspondant au taux de sauts par unité de temps on a donc:

$$m(t) = E[N_3(16) - N_3(14)] = \int_{14}^{16} (24 - t)\, dt = 18 \textit{ clients}$$

N_4 est un Processus de Poisson d'intensité 3, donc
$N_4(19) - N_4(16) \sim P(3.3)$ et $E[N_4(19) - N_4(16)] = 9$ clients.
N_5 est un Processus de Poisson d'intensité $8 + (t - 19) = t - 11$.
L'intensité correspondant au taux de sauts par unité de temps on a donc:

$$E[N_5(21) - N_5(19)] = \int_{19}^{21} (t - 11)\, dt = 18 \textit{ clients}$$

Le nombre moyen de clients qui sont entrés dans ce restaurant sur une seule journée est $3 + 45 + 18 + 9 + 18 = 93$ clients.

Bon courage