

## Chapitre II

### CALCUL DES CONDUITES ET CANAUX

#### Écoulement uniforme

#### PARTIE I : Calcul des canaux

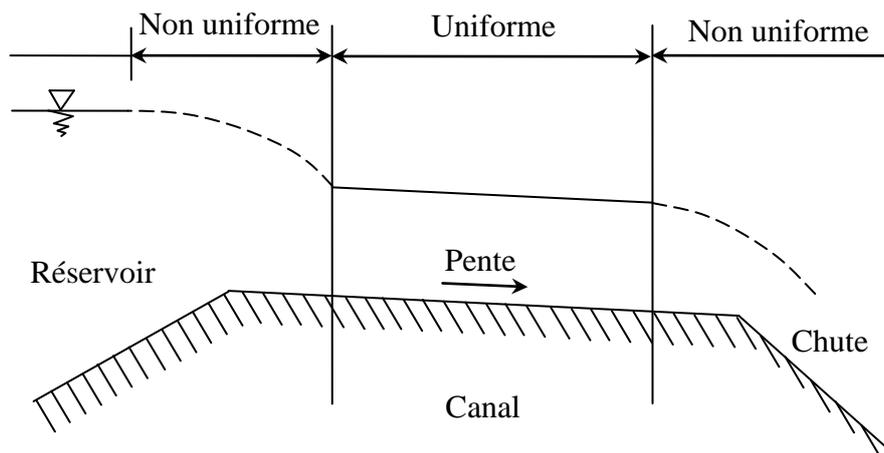
##### I. Définition de l'écoulement uniforme

**Rq :** La définition ci-dessous est valable pour les canaux et les conduites.

Dans un canal, l'écoulement est considéré comme uniforme et permanent lorsque la profondeur d'eau reste invariable (Constante) le long de l'écoulement ainsi que dans le temps. Dans l'écoulement uniforme les autres paramètres, tels que la vitesse moyenne, le débit, la rugosité et la pente de fond, restent invariables dans les différentes sections du canal le long de l'écoulement.

L'écoulement véritablement uniforme est très rare dans les canaux naturels et assez rare dans les canaux artificiels.

L'écoulement uniforme ne s'observe que dans des canaux prismatiques très longs et loin des extrémités (Voir figure 2.1).



*Figure 2.1 : Écoulement uniforme entre les extrémités.*

Bien que l'écoulement uniforme soit rare, on l'utilise souvent comme écoulement standard pour l'étude de base pour tous les autres types d'écoulement.

## II. Coefficient de frottement, coefficient de résistance de l'écoulement et vitesse d'écoulement

Le coefficient de frottement peut être évalué par application de la formule de *Colebrook – White* ou *Achour*. Ce coefficient de frottement peut également être exprimé par l'équation de *Darcy – Weisbach*.

Le coefficient de résistance de l'écoulement peut être exprimé par les formules de *Manning – Strickler* et *Chézy*.

### II.1. Equation de *Darcy – Weisbach*

$$J = \frac{\lambda V^2}{D_h 2g} \quad (2.1)$$

Où :

$J$  : gradient de la perte de charge linéaire,  $J = \Delta H/L$ .

$\lambda$  : coefficient de frottement.

$V$  : vitesse moyenne de l'écoulement.

$D_h$  : diamètre hydraulique.

$\Delta H$  : perte de charge totale entre deux sections.

$L$  : longueur entre deux sections.

### II.2. Formule de *Manning – Strickler*

Cette formule a été théoriquement établie pour le calcul des canaux naturels. Elle exprime la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du coefficient de résistance de l'écoulement, du rayon hydraulique et du gradient de la perte de charge linéaire. Ce dernier correspond à la pente géométrique du canal lorsque l'écoulement se fait à surface libre.

La formule de *Manning – Strickler* est donnée par l'expression suivante :

$$V = KR_h^{2/3} J^{1/2} = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (2.2)$$

Avec :

$V$  : vitesse moyenne de l'écoulement.

$K$  : coefficient de résistance de l'écoulement selon *Strickler*.

$n$  : coefficient de rugosité selon *Manning*.

$R_h$  : rayon hydraulique

$J$  : gradient de la perte de charge linéaire.

Le tableau 2.1 donne des valeurs pour le coefficient de résistance de l'écoulement  $K$  et pour le coefficient de rugosité  $n$ .

Tableau 2.1.

Caractéristiques	$K$ $m^{1/3} \cdot s^{-1}$	$n = 1/K$ $m^{-1/3} \cdot s$
Parois très lisses :		
Revêtements en mortier de ciment et sable, très lisses ; planches rabotées ; tôle métallique sans soudures saillantes .....	100 à 90	0,01 à 0,0111
Mortier lissé .....	85	0,0119
Parois lisses :		
Planches avec des joints mal soignés : enduit ordinaire ; grès.....	80	0,0125
Béton lisse, canaux en béton avec des joints nombreux .....	75	0,0134
Maçonnerie ordinaire ; terre exceptionnellement régulière ...	70	0,0142
Parois rugueuses :		
Terre irrégulière ; béton rugueux ou vieux ; maçonnerie vieille ou mal soignée .....	60	0,0167
Parois très rugueuses :		
Terre très irrégulière avec des herbes : rivières régulières en lit rocheux .....	50	0,0200
Terre en mauvais état ; rivière en lit de cailloux .....	40	0,025
Terre complètement à l'abandon : torrents transportant de gros blocs .....	20 à 15	0,05 à 0,0667

### II.3. Formule de Chézy

Cette formule a été établie pour la première fois en 1775. Elle est exprimée comme suit :

$$V = C\sqrt{R_h \cdot J} \quad (2.3)$$

Avec :

$V$  : vitesse moyenne de l'écoulement.

$C$  : coefficient de résistance de l'écoulement selon Chézy.

$R_h$  : rayon hydraulique.

$J$  : gradient de la perte de charge linéaire.

Le coefficient  $C$  dépend des paramètres géométriques et hydrauliques de l'écoulement, notamment de la forme de la section et de la nature des parois du canal.

De nombreux hydrauliciens ont proposé des expressions du coefficient  $C$ . On cite les formules suivantes :

#### II.3.1. Formule de Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \quad (2.4)$$

Avec :

$\gamma$  : coefficient de Bazin.

$R_h$  : rayon hydraulique.

Le tableau 2.2 donne des valeurs pour six catégories de parois.

Tableau 2.2.

N° des catégories	Nature des parois	$\gamma$
1	Parois très unies (ciment, bois raboté) .....	0,06
2	Parois unies (planches, briques, pierres de taille, etc.) .....	0,16
3	Parois en maçonnerie de moëllons .....	0,46
4	Parois de nature mixte (sections en terre très régulières) .....	0,85
4	Canaux en terre dans les conditions ordinaires .....	1,30
6	Canaux en terre avec fonds de galets, parois herbées .....	1,75

**II.3.2. Formule de Ganguillet et Kutter**

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (2.5)$$

Le tableau 2.3 donne des valeurs pour  $n$ .

Pour les faibles pentes (pratiquement inférieures à 0,0001) le terme  $0,00155/I$  prend des valeurs trop importantes et la formule de *Ganguillet et Kutter* devient nettement moins précise.

**II.3.3. Formule de Kutter**

$$C = \frac{100\sqrt{R_h}}{b + \sqrt{R_h}} \quad \text{Pour le calcul des égouts} \quad (2.6)$$

Avec :

$b = 0,15$  pour ciment lissé et bois raboté ;

0,20 pour grandes canalisation en béton et acier, maçonneries de briques soignées et neuves, planches ;

0,27 pour tuyaux en grès vernissé et acier non rouillé ;

0,20 à 0,45 pour maçonneries de briques ordinaires ;

0,45 à 0,80 pour vieilles maçonneries à joints dégarnis.

**II.3.4. Formule de Manning**

*Manning* a proposé la formule suivante :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (2.7)$$

Remplaçons la relation (2.7) dans celle (2.3), on retrouve la relation (2.2).

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (2.2)$$

Le coefficient  $n$  est variable suivant la nature des parois du canal ; il a la même valeur que celle adoptée pour la formule de *Ganguillet et Kutter* (Tableaux 2.1 et 2.3).

**Tableau 2.3** : Valeurs du coefficient  $n$  des formules de *Ganguillet et Kutter* et de *Manning* (d'après R. E. Horton – 1916).

Nature des surfaces	Etats des parois			
	Parfait	Bon	Assez bon	Mauvais
A) Canaux artificiels				
Ciment lissé .....	0,010	0,011	0,012	0,013
Mortier de ciment .....	0,011	0,012	0,013 (*)	0,015
Aqueducs en bois raboté .....	0,010	0,012 (*)	0,013	0,014
Aqueducs en bois non raboté .....	0,011	0,013 (*)	0,014	0,015
Canaux revêtus de béton .....	0,012	0,014 (*)	0,016	0,018
Moëllons bruts assemblés au ciment .....	0,017	0,020	0,025	0,030
Pierres sèches .....	0,025	0,030	0,033	0,035
Moëllons dressés .....	0,013	0,014	0,015	0,017
Aqueducs métalliques à section demi-circulaire, lisses .....	0,011	0,012	0,013	0,015
Aqueducs métalliques en tôle plissée section demi-circulaire .....	0,0225	0,025	0,0275	0,030
Canaux et fossés en terre, droits et uniformes..	0,017	0,02	0,0225 (*)	0,025
Canaux et fossés avec pierres, lisses et uniformes .....	0,025	0,030	0,033 (*)	0,035
Canaux et fossés avec pierres, rugueux et irréguliers .....	0,035	0,040	0,045	-
Canaux en terre à larges méandres .....	0,0225	0,025 (*)	0,0275	0,030
Canaux en terre dragués .....	0,025	0,0275 (*)	0,030	0,033
Canaux avec lits de pierres rugueuses, herbes sur les rives de terre .....	0,025	0,030	0,035 (*)	0,040
Canaux à fond en terre, côtés avec pierres ....	0,028	0,030 (*)	0,033 (*)	0,035
B) Cours d'eaux naturels :				
1) Propres, rives en ligne droite, l'eau au niveau le plus haut, sans gué ou fosse profonde .....	0,025	0,0275	0,030	0,033
2) Le même que (1) mais avec quelques herbes et pierres .....	0,030	0,033	0,035	0,040

(\*) Valeur utilisée généralement dans les projets.

### II.3.5. Formule de Strickler

Pour des parois (fond et berges) en matériaux non cohérents (terre non revêtue), *Strickler* propose la formule :

$$K = \frac{1}{n} = 26 \left( \frac{R_h}{d_{35}} \right)^{1/6} \quad (2.8)$$

On remplace la relation (2.8) ( $K = 1/n$ ) dans celle (2.7) puis dans la relation (2.3), on retrouve la relation (2.2).

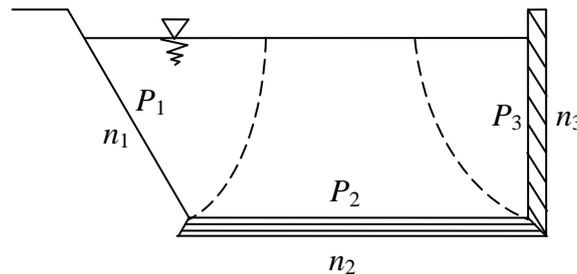
$$V = KR_h^{2/3} J^{1/2} \quad (2.2)$$

$d_{35}$  = diamètre (en m) auquel correspond 35 % (en poids) de matériaux de diamètre supérieur (abscisse de la courbe granulométrique correspondant à l'ordonnée 0,35).

**Remarque :** Pour les canaux naturels aux parois (fond et berge) en granulat non cohésif, on peut ajouter les formules suivantes, concernant le coefficient de *Strickler* :

$$K = \frac{21,1}{d_{50}^{1/6}} \quad \text{ou} \quad K = \frac{26}{d_{90}^{1/6}} \quad (2.9)$$

### II.4. Rugosité composée (Fig. 2.2)



**Figure 2.2 :** Section à rugosité composée.

Le coefficient de rugosité "n" équivalent d'une rugosité composée se calcule par :

$$n = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (P_i \cdot n_i^{3/2})}{P} \right]^{2/3} \quad (2.10)$$

### III. Calcul de débit, Fond fixe

La détermination du débit  $Q$ , d'un canal à fond fixe requiert la connaissance de sa forme géométrique, du coefficient de frottement (coefficient de rugosité  $n$ ) de ses parois et de sa pente.

On admet que les parois (fond et berges) du canal sont fixes ou immobiles, donc non érosives.

### III.1. Débitance

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{1/2} \text{ et } Q = V \cdot A \Rightarrow Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} J^{1/2} \Rightarrow K = \frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \quad \rightarrow$$

C'est la débitance ou bien la conductivité du canal. Elle représente une mesure de la capacité de transport d'eau dans une section de canal donnée.

### III.2. Profondeur normale

La profondeur normale,  $h_n$ , est la profondeur d'eau en écoulement uniforme dans un canal de pente,  $J$ , donné, parcouru par un débit,  $Q$ . Les éléments géométriques de la section qui correspondent à la profondeur normale,  $h_n$ , sont appelés éléments normaux, tels que :  $R_{hn}$ ,  $A_n$ , ou  $P_n$ .

On calculera la profondeur normale d'un canal de forme donnée avec la formule de débit :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{1/2} A \quad (2.11)$$

Pour les cours d'eau naturels ainsi que pour les canaux rectangulaires d'une largeur,  $B$ , importante (Fig. 2.3), on donne  $R_h \approx h$  comme rayon hydraulique.



**Figure 2.3 :** Section d'un canal de largeur importante.

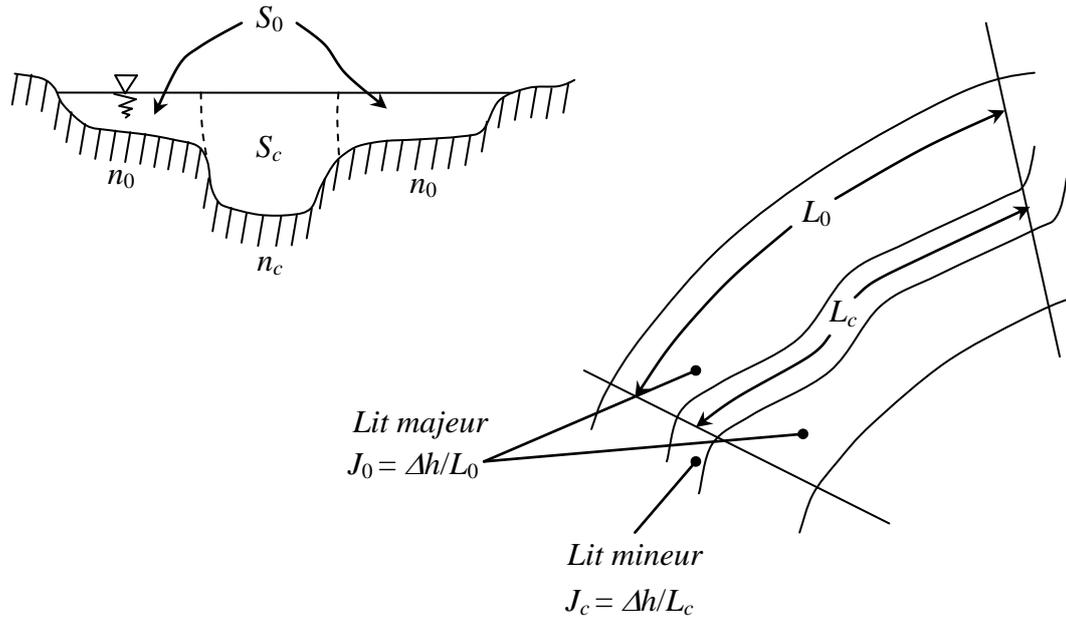
$$B \gg h \Rightarrow R_h = \frac{B \cdot h}{B + 2h} \approx \frac{B \cdot h}{B} \approx h.$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} h^{2/3} J^{1/2} B \cdot h \Rightarrow h = \left[ \frac{n \cdot Q}{J^{1/2} B} \right]^{3/5} \quad (2.12)$$

### III.3. Section composée

La section d'un canal peut être composée de différentes sous-sections (Fig. 2.4), chacune ayant une rugosité et une pente différentes.

Ce cas se présente lors du débordement d'un canal naturel ou artificiel pendant une crue.



**Figure 2.4 :** Section composée.

Ce cas peut être traité approximativement par la relation suivante :

$$Q = Q_c + Q_0 = \frac{1}{n_c} A_c R_{hc}^{2/3} \left( \frac{\Delta h}{L_c} \right)^{1/2} + \frac{1}{n_0} A_0 R_{h0}^{2/3} \left( \frac{\Delta h}{L_0} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

### III.4. Section de débit maximal

La construction d'un canal pour transporter un débit,  $Q$ , avec une pente,  $J$ , et un coefficient de rugosité,  $n$ , donnés coûtera d'autant moins cher que la section,  $A$ , sera plus faible.

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J^{1/2} A, \quad Q = V \cdot A \quad \text{et} \quad R_h = \frac{A}{P}.$$

$$\Rightarrow Q = C^{te} \times (A^{5/3} P^{-2/3}).$$

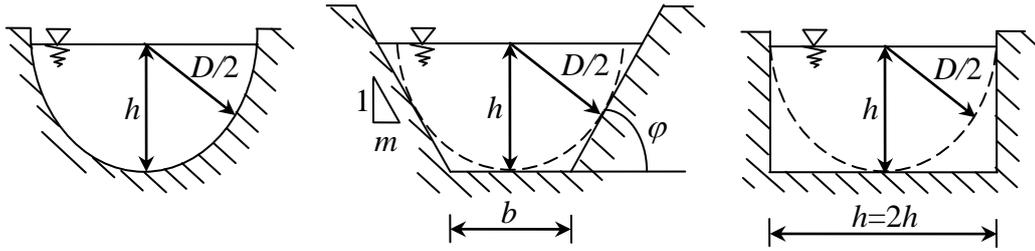
Pour  $A_{\text{constante}} \rightarrow Q \Rightarrow Q_{\text{max}}$  si  $R_h \Rightarrow R_{h\text{max}}$  donc si  $P \Rightarrow P_{\text{min}}$ .

Parmi toutes les formes de sections possibles, c'est la forme du demi-cercle qui réalise  $P_{\text{min}}$  pour une surface,  $A$ , constante. On a donc (Fig. 2.5).

$$A = \frac{\pi D^2}{8} = \frac{\pi(2h)^2}{8} = \frac{\pi h^2}{2}, \quad P = \pi \frac{D}{2} = \pi h, \quad R_h = \frac{\pi h^2}{2 \cdot \pi h} = \frac{h}{2}.$$

La forme demi-circulaire n'est réalisée que dans les canaux artificiels en béton ou en métal.

Dans les canaux en terre, il faut respecter l'angle de repos,  $\varphi$ , et les dispositions constructives. Il s'avère que la forme trapézoïdale isocèle est la plus intéressante.



**Figure 2.5 :** Sections de débit maximal.

On a :

$$A = h(b + mh), \quad P = b + 2h\sqrt{1 + m^2} \quad \text{où} \quad m = \text{ctg}\varphi.$$

On suppose que  $\Delta A$  est nul puisque la surface,  $A$ , reste constante, on a :  
 $dA = h \cdot db + (b + 2mh)dh = 0$ .

Si l'on désire que le périmètre mouillé,  $P$ , soit minimal, on pose :  
 $dP = db + 2\sqrt{1 + m^2} \cdot dh = 0$ .

En éliminant  $db$  et  $dh$  de ces deux dernières équations, on obtient :  
 $b = 2h(\sqrt{1 + m^2} - m)$ .

Il suffit de porter cette valeur,  $b$ , dans les relations de  $A$  et  $P$ , et l'on tire le rayon hydraulique :

$$R_h = \frac{h}{2}$$

qui reste indépendant de l'angle de repos,  $\varphi$ .

A noter que pour  $m = 0$ , le trapèze devient un rectangle tel que :  $b = 2h \Rightarrow R_h = h/2$ .

Pour un canal rectangulaire, où  $b = B$ , le rapport largeur/profondeur doit être :  $(B/h) = 2$ .

#### IV. Calcul de débit, fond mobile

Les canaux en terre (alluvions) composés de particules solides (granulat non-cohésif) sont des canaux à fond mobile.

##### IV.1. Tension due aux forces de frottement (Fig. 7)

La tension due aux forces de frottement qui régissent sur la surface (parois) est :

$$\tau_0 = \gamma R_h J \tag{2.14}$$

$\gamma$  : poids volumique du liquide,  $J$  : pente du fond et  $R_h$  : rayon hydraulique.

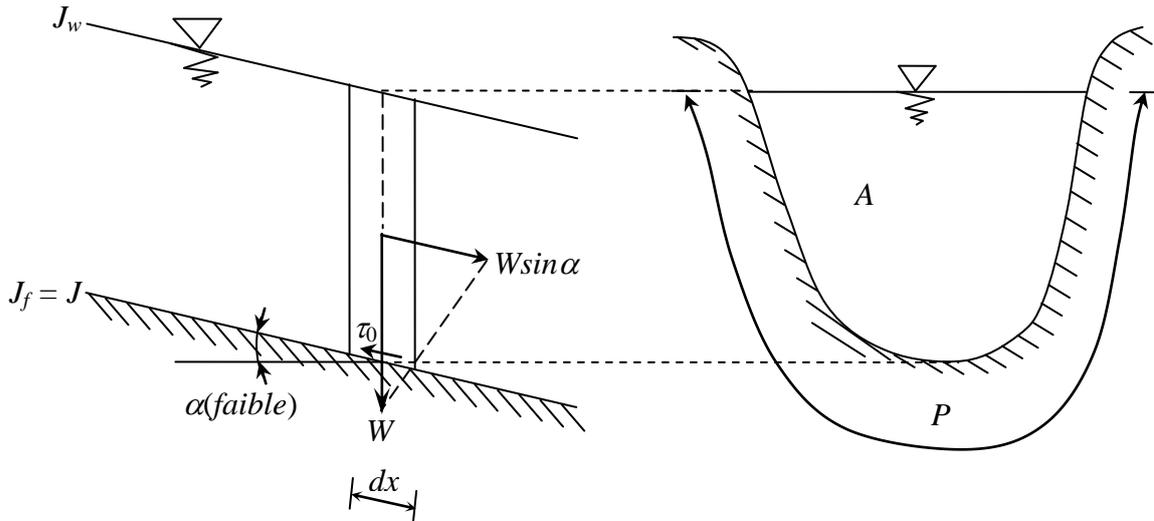


Figure 2.7 : Schéma pour l'écoulement uniforme.

#### IV.2. Vitesse de frottement

La vitesse de frottement s'écrit :

$$v_* = \sqrt{gR_h J} \quad (2.15)$$

On peut exprimer le coefficient de frottement en fonction de la vitesse de frottement comme suit :

$$f = \frac{\tau_0}{\rho V^2 / 8} = 8 \left( \frac{v_*}{V} \right)^2 \quad (2.16)$$

$\rho$  = masse volumique du liquide.

#### IV.3. Ondulation du fond mobile

Dans des canaux naturels et artificiels, un fond mobile est défini comme un fond composé de particules solides (granulats non cohésifs, alluvions) qui se déplacent sous l'action de l'écoulement en formant des ondulations du lit, appelées couramment dunes (Fig. 8). Ces particules sont caractérisées par la densité,  $\rho_s$ , le diamètre médian,  $d \equiv d_{50}$ , et la distribution granulométrique.

Un fond mobile présente successivement plusieurs aspects qui correspondent à différents types de déformations du fond. On les classe en trois régimes à l'aide du nombre de Froude,  $IF$  (Fig. 2.9) :

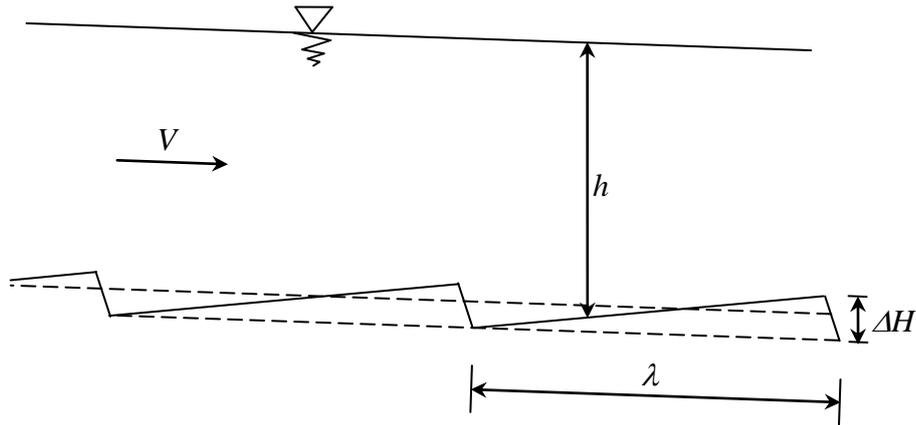


Figure 2.8 : Schéma d'un lit avec une série de dunes.

- 1-  $IF < 1$  : Le fond reste d'abord plat, ceci jusqu'à ce que la vitesse atteigne une valeur critique et que le transport (de particules) solide commence.  
Apparaissent ensuite les mini-dunes (rides), puis les dunes plus allongées.
- 2-  $IF = 1$  : La vitesse croît et les dunes (déjà très allongées) sont lavées et disparaissent. C'est l'état de transition au fond plat.
- 3-  $IF > 1$  : Si la vitesse augmente encore, il se forme des dunes d'une autre espèce, appelées antidunes, qui, à l'inverse des dunes, se propagent généralement vers l'amont. La surface de l'eau est onduleuse et le transport solide très important.

Régime	Transport solide	Forme du lit
$IF < 1$	non	plat
	oui	mini-dune dune
$IF \cong 1$	oui	plat
$IF > 1$	oui	antidune

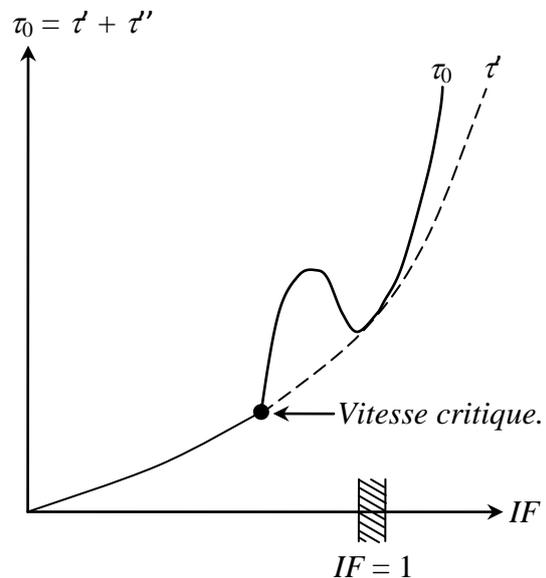


Figure 2.9 : Régime d'écoulement sur fond mobile.

Pour  $\Delta H$  et  $\lambda$ , des relations indicatives en rapport avec la profondeur d'eau sont :

$$\frac{\Delta H}{h} < \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{h} \approx 5 \quad (2.17)$$

La présence de dunes entraîne une augmentation de la résistance à l'écoulement. Pour calculer la tension totale due aux forces du frottement au fond,  $\tau_0$ , on admet qu'il y a additivité de la contribution due aux rugosité des grains,  $\tau'$ , et de celle due aux dunes,  $\tau''$ , c-à-d :

$$\tau_0 = \tau' + \tau'' \quad (2.18)$$

$$\text{Ou : } \gamma R_h J = \gamma(R'_h + R''_h)J.$$

Avec :  $R'_h$  et  $R''_h$  représentant les rayons hydrauliques dus aux rugosités et aux dunes respectivement.

On a aussi :

$$v_*^2 = (v'_*)^2 + (v''_*)^2 \quad (2.19)$$

$$f = f' + f''$$

Ou encore :

$$n = n' + n'' \quad ; \quad C = C' + C'' \quad (2.20)$$

#### IV.4. Coefficient de frottement, fond mobile

Il existe des méthodes où l'on détermine directement le coefficient de frottement (total), ' $f$ ' ou ' $n$ '.

Il existe d'autres méthodes où l'on calcule le coefficient de frottement dû à la rugosité, ' $f$ ' ou ' $n$ ', selon les formules présentées précédemment (coefficient de frottement ' $f$ ' est le même que ' $\lambda$ '); on détermine ensuite le coefficient de frottement dû aux dunes, ' $f''$ ' ou ' $n''$ ', avec une autre formule.

##### IV.4.1. Calcul directe de $f$

$$1- V = K_T R_h^x J^y \quad (2.21). \text{ formule de type Chézy.}$$

D'après *Sugio* (1972)

$$V = K_T R_h^{0,54} J^{0,27} \quad (2.22)$$

*Sugio* (1972) a évalué extensivement des cours d'eau naturels de  $0,1 < d_{50} [\text{mm}] < 130$  et des canaux artificiels de  $0,2 < d_{50} [\text{mm}] < 7,0$ , il propose la formule (2.22).  $R_h$  exprimé en (cm) et  $V$  en (cm/s).

Les valeurs de  $K_T$  sont :  $K_1 = 54$  pour les mini-dunes.

$$K_2 = 80 \text{ pour les dunes.}$$

$K_3 = 110$  pour un régime supérieur (équilibre).

$K_4 = 43$  pour les rivières à méandres.

### 2- Formule de Grishanin (1990) :

$$C = 5,25 \left( \frac{V \cdot g}{\sqrt[3]{g \cdot v}} \right)^{1/2} \left( \frac{H_h}{B} \right)^{1/6} \quad (2.23)$$

Elle est établie pour les rivières russes de  $0,1 < d_{50} [\text{mm}] < 0,44$  et de  $3 \cdot 10^{-6} < J_f < 2,2 \cdot 10^{-4}$ .

### 3- Deuxième formule de Grishanin (1990) :

$$V = \frac{1}{M_G^2} \left( \frac{g}{B} \right)^{1/2} H_h \quad (2.24)$$

Où  $M_G$  est une invariante locale non dimensionnelle,  $M_G = 0,91 \pm 0,12$ , pour un fond de sable.

### 4- Formule de Brownlie (1983) :

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{d_{50}(\gamma_s - \gamma)} = W(q_* J)^x J^y \sigma^z \left( \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \right) \quad (2.25)$$

Cette relation a été établie en utilisant une série importante de données de canaux artificiels (en laboratoire) et de cours d'eau naturels pour un diamètre de granulat entre  $0,11 < d_{50} [\text{mm}] < 1,35$  et une pente entre  $3 \cdot 10^{-6} < J < 3,7 \cdot 10^{-2}$ .

Avec :  $q_* = \frac{q}{\sqrt{g d_{50}^3}}$  ;  $q$  est le débit unitaire et  $\sigma$  l'écart type du diamètre de grain dans sa

distribution granulométrique et  $\gamma_s = \rho_s \cdot g$  le poids volumique du granulat. Les coefficients obtenus par analyse statistique sont :

- Pour les canaux à fond mobile avec dunes et mini-dunes :

$$W = 0,37, x = 0,65, y = 0,09, z = 0,11.$$

- Pour les canaux à fond mobile plat ou avec antidunes :

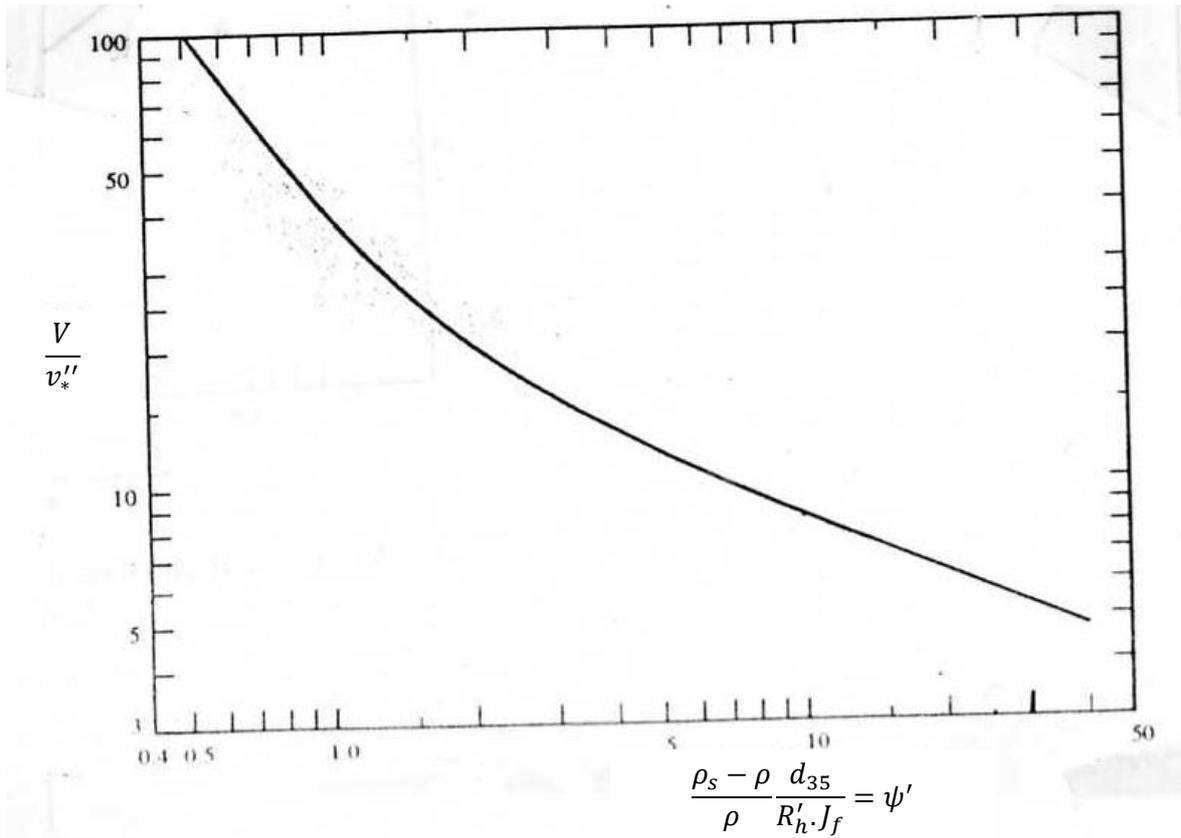
$$W = 0,28, x = 0,62, y = 0,09, z = 0,08.$$

## IV.4.2. Calcul de $f''$

### IV.4.2.1. 1<sup>ère</sup> relation

La relation proposée par *Einstein – Barbarossa* se traduit par un graphique (Fig. 2.10) où la dispersion expérimentale est considérable. On a utilisé des données de rivières américaines ayant  $0,19 < d_{35} [\text{mm}] < 4,3$  et  $1,49 \cdot 10^{-4} < J_W < 1,7 \cdot 10^{-3}$ . La relation est donnée par :

$$\frac{V}{v_*''} = f \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{d_{35}}{R_h' J_f} \right) = f(\psi') \quad (2.26)$$



**Figure 2.10 :** Vitesse de frottement,  $v_*''$ , pour fond mobile dû aux ondulation, selon Einstein – Barbarossa.

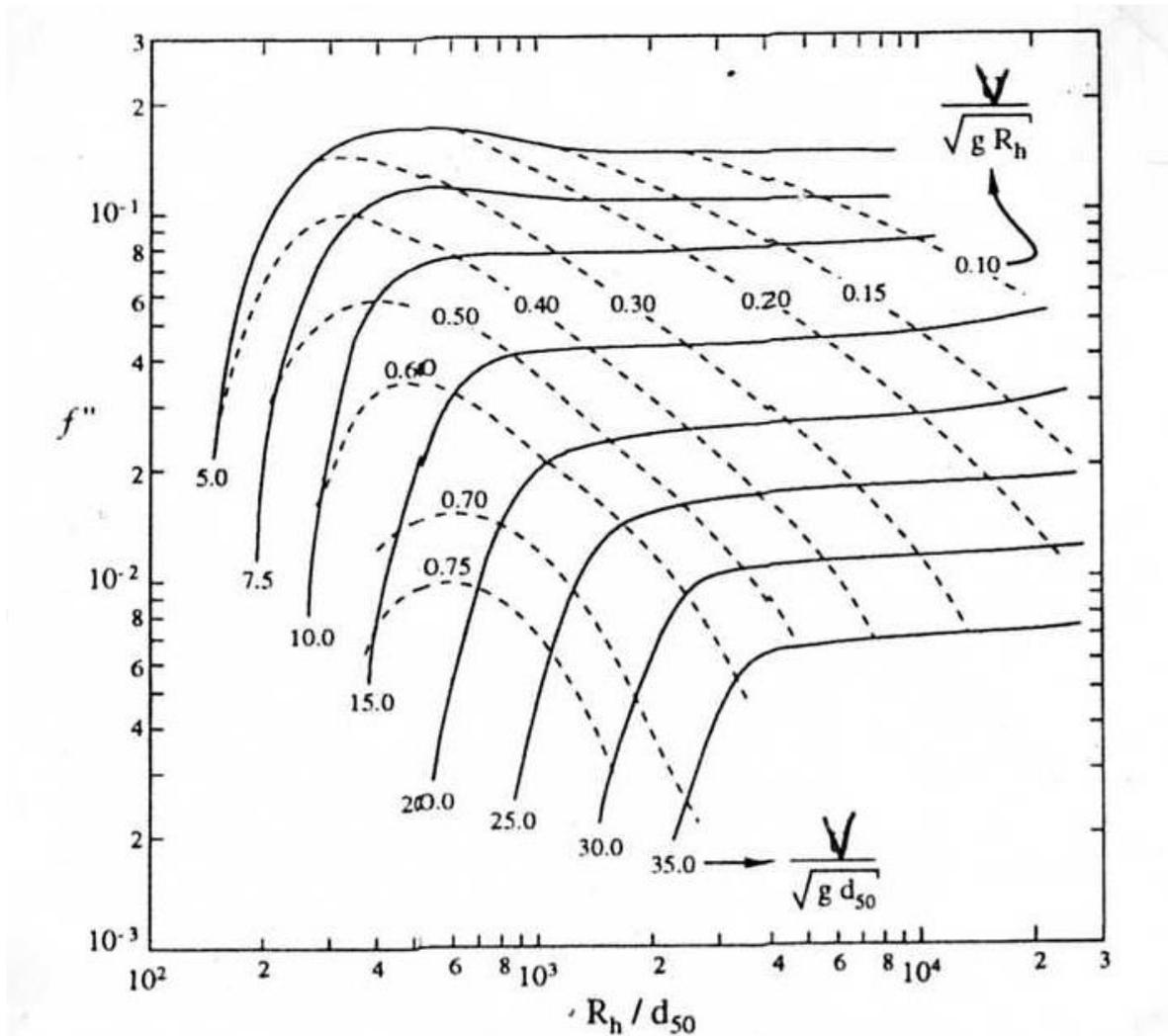
#### IV.4.2.2. 2<sup>ème</sup> relation

La relation proposée par Alam – Kennedy est donnée par :

$$f'' = f \left( \frac{R_h}{d_{50}}, \frac{V}{\sqrt{gd_{50}}} \right) \quad (2.27)$$

Elle est présentée sous forme de graphique sur la figure 2.11 ; là également, la dispersion expérimentale est très importante. On a beaucoup utilisé de données de canaux artificiels (en laboratoire) avec  $0,04 < d_{50} [\text{mm}] < 0,54$  et de rivières américaines avec  $0,08 < d_{50} [\text{mm}] < 0,45$ .

Dans la figure 2.11, la relation Einstein – Barbarossa correspond au secteur où les contours des valeurs  $V/\sqrt{gd_{50}}$  restent approximativement horizontaux ; c-à-d : si  $R_h/d_{50} > 3.10^3$ .



**Figure 2.11** : Coefficient de frottement,  $f''$ , pour fond mobile dû aux ondulations, selon Alam - Kennedy.

#### IV.5. Calcul de débit

On calcule le débit en utilisant le coefficient de frottement pour les écoulements à fond mobile.

Dans les canaux artificiels ou naturels, la vitesse (au voisinage des parois/fond) doit :

- 1- ne pas être supérieure à certaines valeurs critiques, à cause des risques d'érosion des particules solides qui se trouvent sur le fond : c'est la vitesse maximum admissible ou vitesse d'érosion, couramment appelée vitesse critique,
- 2- ne pas être inférieure à certaines valeurs critiques, à cause des risques de dépôt ou de sédimentation des particules solides susceptibles de se trouver dans l'écoulement : c'est la vitesse minimum admissible ou vitesse de sédimentation.

La vitesse,  $V$ , choisie pour le bon fonctionnement d'un canal doit donc être comprise entre la vitesse d'érosion,  $V_E \equiv V_{cr}$ , et la vitesse de sédimentation,  $V_D$ , soit :

$$V_D < V < V_E.$$

#### IV.5.1. Vitesse de sédimentation

La vitesse minimum admissible ou vitesse de sédimentation,  $V_D$ , est la vitesse minimum nécessaire pour transporter l'eau contenant des particules solides.

On prend les valeurs approximatives suivantes :

$$0,25 < V_D \text{ [m/s]} < 0,9$$

selon qu'on charrie du limon fin ou du sable plus gros.

Un diagramme (Fig. 2.12) établi par *Hjulstrom* délimite la zone de sédimentation en fonction du diamètre du granulat.

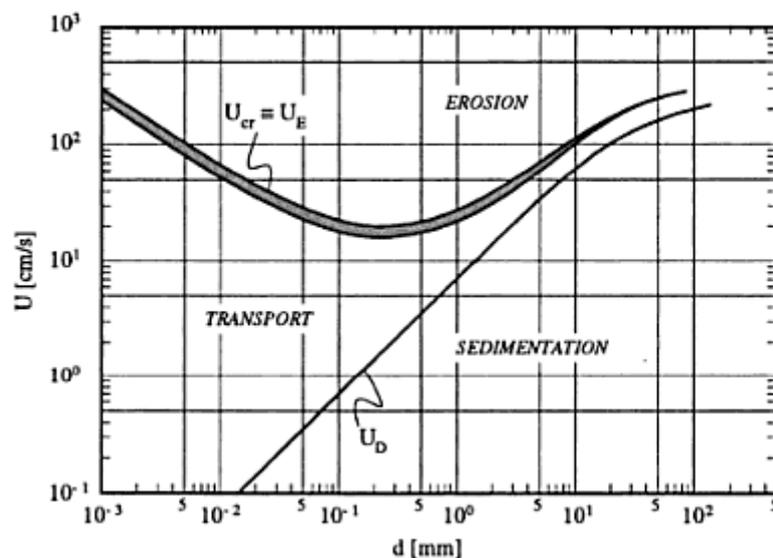
#### IV.5.2. Vitesse critique

Il y a érosion des parois (fond) à partir d'une certaine valeur critique exprimée par :

- 1- la vitesse moyenne critique,  $V_{cr}$ , ou la vitesse critique,  $v_{bcr}$ , près du fond,
- 2- la tension critique de frottement,  $\tau_{0cr}$ .

Rappelons que la tension de frottement est définie par :

$$\tau_0 = \gamma R_h J \tag{2.14}$$



**Figure 2.12 :** Vitesse de sédimentation et d'érosion,  $V_D$  et  $V_{cr}$ , pour des granulats uniformes, selon *Hjulstrom*.

et la vitesse moyenne par :

$$V = C\sqrt{R_h J} \quad (2.28)$$

Cela donne le rapport suivant :

$$\frac{V}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{C}{\sqrt{g}}$$

En hydraulique fluviale, on utilise aussi souvent une tension adimensionnelle de frottement,  $\tau_*$  :

$$\frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)d} \equiv \tau_* = \frac{\gamma R_h J}{(\gamma_s - \gamma)d} \quad (2.29)$$

Où  $d$  est un diamètre du granulat (à spécifier),  $\gamma_s$  et  $\gamma$  étant le poids volumique du granulat et de l'eau respectivement.

Pour l'érosion d'un lit composé de granulats uniformes d'un diamètre important, *Neill* propose la relation suivante :

$$\frac{\rho V_{cr}^2}{gd(\rho_s - \rho)} = 2,5 \left( \frac{d}{H_h} \right)^{-0,2} \quad (2.30)$$

qui est valable pour  $0,01 < (d/H_h) < 1,0$ .

En s'appuyant sur les concepts de l'hydrodynamique, *Shields* a pu démontrer une relation entre la tension adimensionnelle de frottement,  $\tau_*$ , (relation 2.29) et le nombre de *Reynolds* de frottement,  $R_{e*} = v_* d / \nu$  :

$$\tau_* \equiv \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma)d} = f \left( \frac{v_* d}{\nu} \right) \quad (2.31)$$

Où  $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ . *Shields* a déterminé cette relation en utilisant des résultats expérimentaux. Pour le diamètre du granulat, on prend couramment  $d \equiv d_{50}$ . A noter que le seuil critique se situe approximativement entre :

$$0,03 < \tau_{*cr} < 0,06.$$

L'utilisation de la relation de *Shields*, relation (2.31), n'est pas simple. *Yalin* (1972) a proposé d'éliminer cet inconvénient par la combinaison de :

$$\frac{R_{e*}^2}{\tau_*} = \frac{d^3 g (\rho_s - \rho)}{\nu^2 \rho}$$

Plutôt que d'utiliser  $R_{e*}$ , on propose d'utiliser un diamètre de granulat adimensionnel :

$$d_* = d \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot \frac{g}{\nu^2} \right)^{1/3}$$

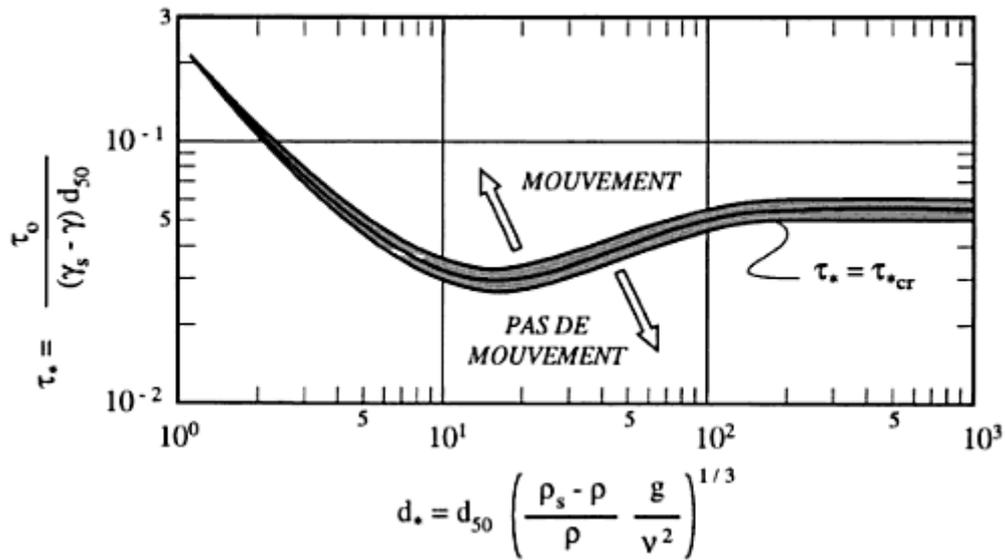


Figure 2.13 : Tension adimensionnelle de frottement,  $\tau_*$ , en fonction du diamètre adimensionnel du granulat,  $d_*$ , selon Shields – Yalin.

La relation (2.31) s’écrit alors :

$$\tau_* = f(d_*) \tag{2.31}$$

Elle est donnée sur la figure 2.13 ; on prend  $d = d_{50}$ .

Si l’on connaît les propriétés du fluide,  $\rho$  et  $\nu$ , et du granulat,  $\rho_s$  et  $d$ , on peut facilement déterminer la valeur de  $\tau_{*cr}$  et ensuite la valeur de  $\tau_{0cr}$ .

#### IV.5.3. Répartition de tension

Pour un canal de largeur importante, lorsque  $R_h \equiv h$ , on écrit :

$$\tau_0 = \gamma R_h J = \gamma h J \tag{2.33}$$

Pour un canal trapézoïdal, une répartition typique est donnée sur la figure 2.14.

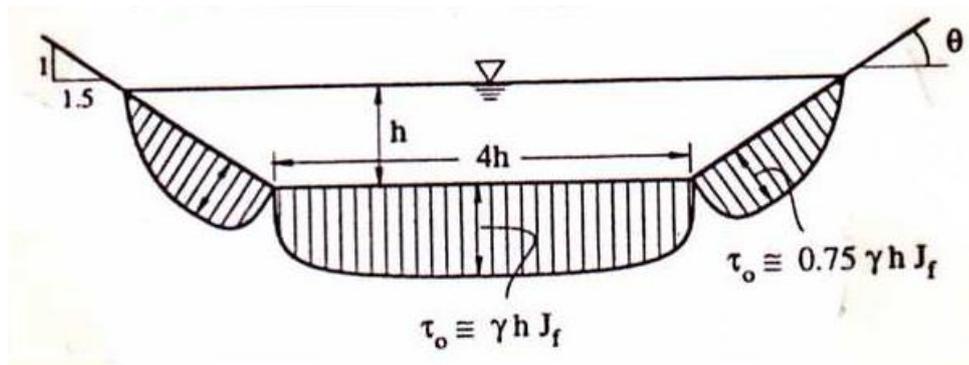


Figure 2.14 : Répartition de tension dans un canal trapézoïdal.

#### IV.5.4. Section stable

La section stable d'un canal à fond mobile, donc érodible, est la section dans laquelle il n'y a pas d'érosion sur tout le périmètre mouillé,  $P$ .

La section stable idéale – avec un débit maximal et un périmètre mouillé minimal – peut être calculée selon une méthode avancée par *Glevert* et *Lane*. La forme de cette section (Fig. 2.15) peut être déterminée ainsi :

- 1- on admet que, à la surface de l'eau, l'angle des berges se confond avec l'angle de repos,  $\theta_s \equiv \varphi$ .

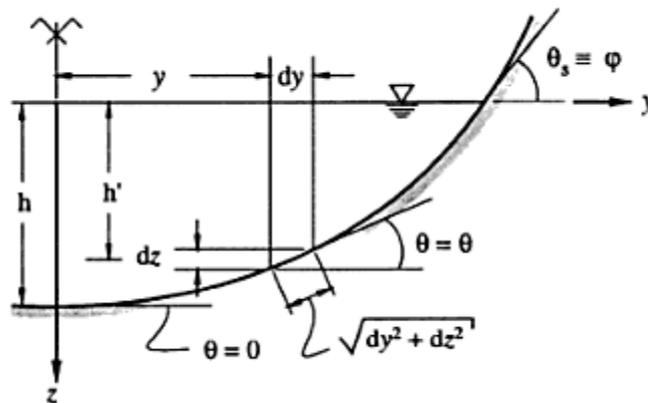


Figure 2.15 : Section stable idéale.

- 2- la tension de frottement sur un élément du fond situé sur la berge est :

$$(\tau_0^W) = \gamma h' J (dy / \sqrt{dy^2 + dz^2}) = \gamma h' J \cos \theta.$$

- 3- On admet que cette tension de frottement,  $(\tau_0^W)$ , est critique,  $(\tau_{0cr})^W$ , sur tout le périmètre mouillé ; on écrit :

$$\gamma h' J \cos \theta \leftarrow (\tau_0^W) \equiv (\tau_{0cr})^W \Rightarrow \gamma h J \left[ \cos \theta \left( 1 - \frac{tg^2 \theta}{tg^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Où  $h$  est la profondeur d'eau maximale située à  $y = 0$ .

- 4- La géométrie de la section stable idéale est :

$$h' = h \cos \left( \frac{tg \varphi}{h} y \right) \quad (2.34)$$

C'est une sinusoïde.

- 5- D'autres paramètres d'une telle section se déduiront par :

$$A = 2h^2 / tg \varphi$$

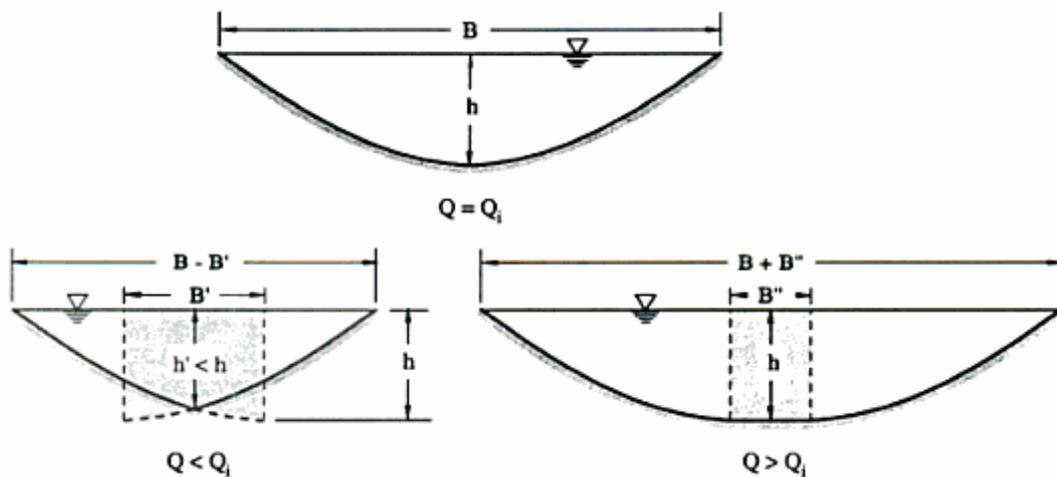
$$B = \pi h / tg \varphi \quad (2.35)$$

$$V = \frac{1}{n} J^{1/2} \left( \frac{h \cos \varphi}{E} \right)^{2/3}$$

Avec  $h = \tau_0/gJ$  et  $E(\sin \varphi)$  représentant une intégrale elliptique approximée par  $E \approx \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi\right)$ .

6- Le débit,  $Q_i$ , qui peut être transporté à travers cette section stable idéale est évidemment donné par  $Q_i = V.A$ .

Si le débit,  $Q$ , qui doit être transporté dans une telle section est différent du débit idéal,  $Q_i$ , donc  $Q \neq Q_i$ , un calcul correctif devra être fait (Fig. 2.16).



**Figure 2.16 :** Section stable idéale pour différentes largeurs.

1- Pour  $Q < Q_i$ , on propose de réduire la largeur,  $B$ , de la section par  $B'$ , qui se calcule par :

$$B' = B \left( 1 - \sqrt{\frac{Q}{Q_i}} \right) \quad (2.36)$$

2- Pour  $Q > Q_i$ , on propose d'augmenter la largeur,  $B$ , de la section par  $B''$ , qui se calcule par :

$$B'' = n \frac{Q - Q_i}{h^{5/3} J^{1/2}} \quad (2.37)$$

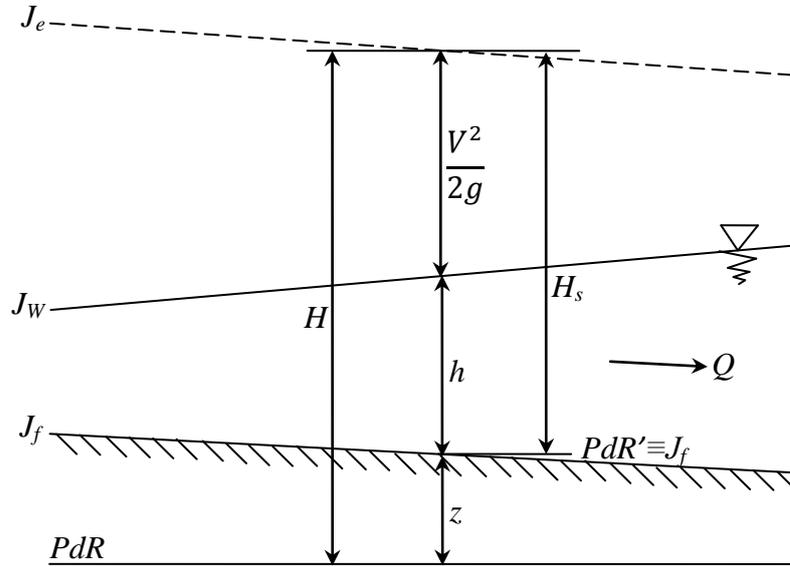
$n$  : coefficient de rugosité de Manning.

Sur la figure 2.16, on remarquera l'effet du changement de largeur de la section sur la géométrie du canal.

## V. Energie spécifique

Pour définir la charge totale,  $H$ , dans une section donnée, on se rapporte à un plan de référence horizontal quelconque (Fig. 2.17) ; pour une pente faible, on écrit :

$$H = \frac{V^2}{2g} + h + z \quad (2.38)$$



**Figure 2.17 :** Définition de la charge totale,  $H$ , et de la charge spécifique,  $H_s$ .

Si l'on se réfère maintenant au fond du canal – le terme  $z$  est fixé par l'implantation du canal –, on définit une fraction de la charge totale, appelée charge spécifique,  $H_s$  ; on écrit alors (Fig. 2.17) :

$$H_s = \frac{V^2}{2g} + h \quad (2.39)$$

Avec l'équation de continuité,  $Q = V.A$ , on obtient :

$$H_s = \frac{Q^2/A^2}{2g} + h \quad (2.40)$$

### V.1. Courbe d'énergie spécifique

L'équation (2.40) donne l'évolution de la charge spécifique,  $H_s$ , en fonction de la profondeur d'eau,  $h$ , pour un débit,  $Q = V.A$ , donné.

La figure 2.18, montre la courbe d'énergie spécifique,  $H_s = f(h)$ , pour  $Q = C^{te}$ .

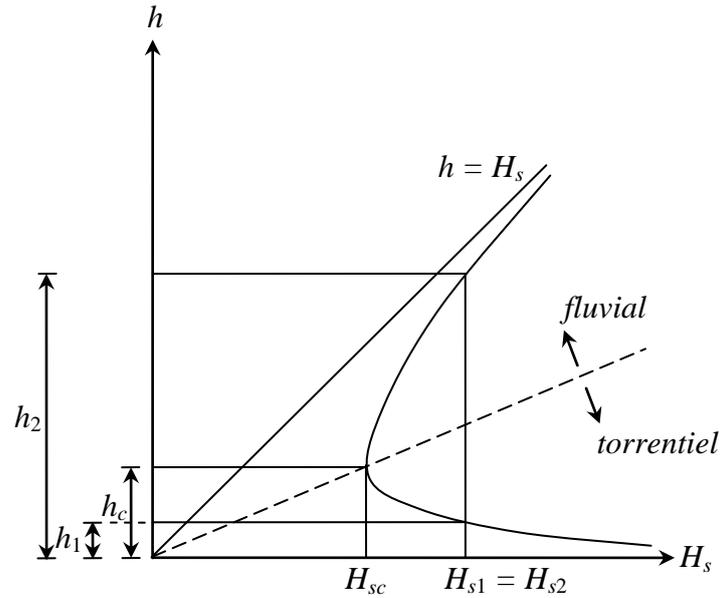


Figure 2.18 :  $H_s = f(h)$ , pour  $Q = C^{te}$ .

La courbe a un minimum,  $H_{sc}$ , pour :

$$\frac{V^2}{gH_h} = 1 \quad (2.41)$$

On distingue les régimes d'écoulement suivants :

$h < h_c \rightarrow$  régime torrentiel (sur – critique).

$h > h_c \rightarrow$  régime fluvial (sous – critique).

$h \equiv h_c \rightarrow$  régime critique.

## V.2. Courbe de débit

L'équation (2.40) donne aussi l'évolution du débit,  $Q$ , en fonction de la profondeur d'eau,  $h$ , pour une charge spécifique,  $H_s$ , comme suit :

$$Q = A\sqrt{2g(H_s - h)} \quad (2.42)$$

On obtient de cette courbe (Fig 2.19) :

- Pour  $h = 0$ ,  $Q = 0$ .
- Pour  $h = H_s$ ,  $Q = 0$ .

De plus, la courbe a un maximum,  $Q_{max}$ , pour :  $2(H_s - h) - H_h = 0$ .

Les valeurs,  $h$  et  $H_h$ , qui correspondent à un débit maximal,  $Q_{max}$ , sont les profondeurs critiques,  $h_c$  et  $H_{hc}$ . Pour un débit inférieur à  $Q_{max}$ , on retrouve les deux différents régimes d'écoulement.

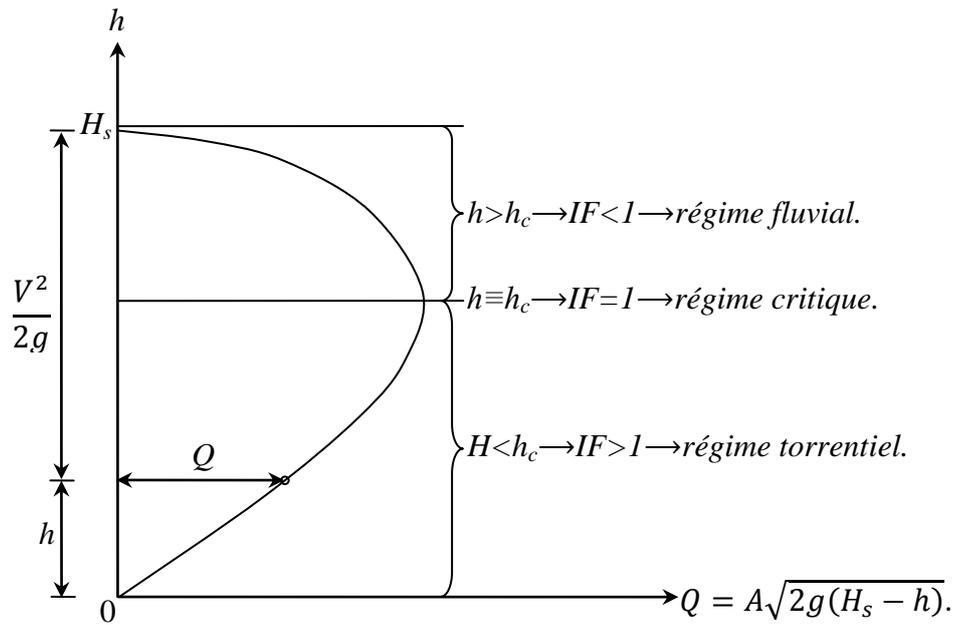


Figure 2.19 : Courbe des débits,  $Q = f(h)$ , pour  $H_s = C^{te}$ .

Pour un canal rectangulaire,  $H_h \equiv h$ , on obtient :

$$h_c = \frac{2}{3}H_{sc} \quad (2.43)$$

Pour des canaux de section triangulaire et parabolique, on obtient respectivement :

$$h_c = \frac{4}{5}H_{sc} \quad (2.44)$$

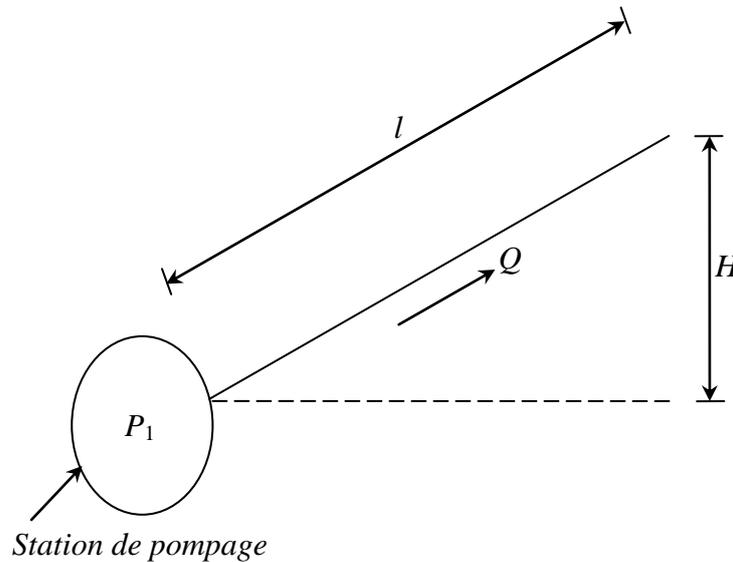
Et

$$h_c = \frac{3}{4}H_{sc} \quad (2.45)$$

## PARTIE II : Calcul des conduites

Le dimensionnement des conduites circulaires en charge peut se faire en suivant les étapes ci-dessous :

- De l'eau, de masse volumique  $\rho$ , de viscosité cinématique  $\nu$  et de débit  $Q$ , doit être acheminée à travers une conduite circulaire rectiligne de diamètre  $D$  et de rugosité absolue  $\varepsilon$ , sur une longueur  $l$  et sur une hauteur  $H$ . l'accélération de la pesanteur est  $g = 10 \text{ m/s}^2$  (Fig. 2.20).



**Figure 2.20**

Dans la figure 2.20,  $P_1$  représente la pression à la sortie de la station de pompage.

Il s'agit de répondre à un besoin de dimensionnement c-à-d parmi les diamètres commerciaux ci-dessous indiqués, quel est le plus petit diamètre  $D$  pouvant satisfaire aux conditions du problème donné ?

Diamètres commerciaux (en millimètres)
60 – 80 – 100 – 125 – 200 – 250 – 300 – etc .....

- Pour résoudre ce type de problème, la méthode classique fait d'abord appel à l'équation de *Darcy – Weisbach* :

$$J = \frac{\lambda V^2}{D_h 2g} \quad , \quad Q = V.A \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\lambda Q^2}{D_h 2gA^2}$$

Puisque la conduite est pleine :  $D_h = D$  et  $A = \frac{\pi D^2}{4}$ .

$$\Rightarrow J = \frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g \frac{\pi^2 D^4}{16}} = \frac{8Q^2 \lambda}{g\pi^2 D^5}$$

La perte de charge linéaire étant :

$$\Delta h_c = J \cdot l = \frac{8Q^2 l \lambda}{g\pi^2 D^5}$$

- La méthode classique fait ensuite appel à la formule de Colebrook – White :

$$\lambda^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{\lambda}} \right]$$

Et évolue le coefficient de frottement  $\lambda$  par un procédé itératif à partir des valeurs données du nombre de *Reynolds*  $R$  et de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ .

$$R = \frac{V \cdot D_h}{\nu} = \frac{Q \cdot D_h}{A \cdot \nu} = \frac{4Q \cdot A}{\pi \cdot A \cdot \nu} = \frac{4Q}{\pi \cdot D \cdot \nu}$$

- En écrivant l'équation de *Bernoulli* entre la section initiale de la conduite à la sortie immédiate de la station et la section de l'extrémité aval de la conduite, on peut déduire la perte de charge totale  $\Delta h$ .
- Il s'agit donc d'évaluer le plus petit diamètre  $D$ , parmi ceux proposés, de telle sorte que la perte de charge que ce diamètre occasionne  $\Delta h_c$  soit inférieure ou à la limite égale à  $\Delta h$  calculé par l'équation de *Bernoulli*.

### **Exemple d'application :**

Pour l'exemple de la figure 2.20, déterminer le diamètre de la conduite circulaire pleine  $D$ , sachant que :  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $Q = 400 \text{ m}^3/\text{heure}$ ,  $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$ ,  $l = 1000 \text{ m}$ ,  $H = 20 \text{ m}$  et  $P_1/\gamma = 50 \text{ m}$  colonne d'eau.

### **Solution :**

En appliquant l'équation de *Bernoulli* entre la section initiale et finale de la conduite on trouve :

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h.$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{et} \quad \frac{P_2}{\gamma} = 0, \quad z_2 - z_1 = H = 20 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\frac{P_1}{\gamma} - (z_2 - z_1) = \Delta h = 50 - 20 = 30 \text{ m.}$$

Il s'agit donc de proposer un diamètre  $D$  et de calculer  $\Delta h_c$ . On doit alors obtenir  $\Delta h_c \leq \Delta h$ .

$$\Delta h_c = \frac{8Q^2 l \lambda}{g\pi^2 D^5} = \frac{8(400/3600)^2 1000 \lambda}{10\pi^2 D^5} \approx \frac{\lambda}{D^5} \times 1,0007 \approx \frac{\lambda}{D^5}$$

On calcule  $\lambda$  par la formule de *Colebrook – White* ou bien par la formule de *Achour*, avec :

$$R = \frac{4Q}{\pi \cdot D \cdot v} = \frac{4(400/3600)}{\pi \cdot D \cdot 10^{-6}} = 141471,105/D.$$

Le calcul est regroupé dans le tableau ci-dessous.

N°	$D$ (mm)	$R$	$\lambda$ <i>Colebrook – White</i>	$\lambda$ <i>Achour</i>	$\Delta\lambda/\lambda$ (%)	$\Delta h_c = \lambda/D^5$ (m)
1	60	$2,35785 \cdot 10^6$	0,0224163	0,022460	0,20	28827,5
2	80	$1,768388 \cdot 10^6$	0,208966	0,0209558	0,28	6377,15
3	100	$1,41471 \cdot 10^6$	0,019855	0,0199283	0,37	1985,5
4	125	$1,131768 \cdot 10^6$	0,0189320	0,0190210	0,47	620,365
5	150	$9,4314 \cdot 10^5$	0,0182689	0,018371	0,56	240,578
6	200	$7,07355 \cdot 10^5$	0,0174009	0,0175215	0,70	54,378
7	<b><u>250</u></b>	$5,65884 \cdot 10^5$	0,0168926	0,017023	0,77	<b><u>17,298 &lt; 30 m</u></b>
8	300	$4,7157 \cdot 10^5$	0,0165946	0,016728	0,80	6,829

Au regard des résultats obtenus, le plus petit diamètre  $D$  occasionnant une perte de charge linéaire  $\Delta h$  inférieure à 30 m de colonne d'eau est donc  $D = 250$  m.