# Processus Aléatoires- Partie1

Réalisé par Dr. A. Redjil
Département de mathématiques, UBMA, Annaba

April 17, 2020

**Abstract**

E-mail: a.redjil@univ-annaba.dz

# 1 Processus aléatoires

## 1.1 Notions de base sur les processus aléatoires

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, A, P)$.

### 1.1.1 Processus aléatoire

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires (v.a) définies sur l'éspace probabilisable $(\Omega, A)$ à valeurs dans un ensemble mesuré $(\mathbb{E}, \varepsilon)$. On dit que $X$ est un processus aléatoire. La variable laéatoire $X_n$ represente la variable observée à la date $n$.

Le déroulement le temps et la structure d'information qui en découle sont fortement liés grace à la notion suivante:

**Definition 1** *(Filtration) Une filtration de $\mathcal{A}$ est une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous- $\sigma$-algèbres de $\mathcal{A}$, notée $\mathbb{F}$. On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$ un espace probabilisé filtré. Pour chaque $n \in N$, la sous-$\sigma$-algèbre $\mathcal{F}_n$ représente l'information disponible à la date $n$. La croissance de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ traduit l'idée que l'information ne peut que s'accumuler au fil du temps, et qu'il n'y a pas de possibilité d'oublier des informations passées.*

*un processus aléatoire se doit d'être décrit en relation avec une filtration, de la même façon qu'une variable aléatoire fait référence à une $\sigma$-algèbre.*

*La filtration permet de décrire la structure de l'information et de sa dynamique dans le temps de maniére rigoureuse.*

**Example 2** *Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processus aléatoire de $(\Omega, A)$ dans $(\mathbb{E}, \varepsilon)$, on appele filtration naturelle de $X$, la filtration de $A$ définie par:*

$\mathcal{F}_n^X \quad := \ \sigma(X_i \ , i \leq n), \, n \geq 0,$

**Conditions habituelles**

Une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$satisfait les conditions habituelles si elle complète et continue à droite .

Soit $N$ la classe des ensembles $F-$négligeables de $F_\infty$, la filtration$(F_t)$ est dite complète si $N \subset F_0$, notons que $F_\infty = \sigma\left(X_{s;s\geq 0}\right)$ est la sous tribu de $F$ engendrée par les $(X_{s;s\geq 0})$, la filtration $(F_t)$ est dite continue à droite si $F_t = \underset{s\succ t}{\cap} F_s, \forall t \geq 0$.

**Definition 3** ***Processus adapté***

*Soit* $X = (X_n)\ _{n\geq 0}$ *un processus aléatoire, et* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*une filtration de* $\mathcal{A}$*. On dit que*

- $X$ *est* $\mathbb{F}$*-adapté si* $X_n$ *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable pour tout* $n \geq 0$*,*

  ***Processus prévisible***

- $X$ *est* $\mathbb{F}$*-prévisible si* $X_n$ *est* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurable pour tout* $n \geq 0$*, où On note par* $\mathcal{F}_{-1}$*, la* $\sigma$*-algèbre:* $\mathcal{F}_{-1} := \{\phi, \Omega\}$*.*

### 1.1.2 Temps d'arrêt

Motivation

La notion de temps d'arrêt joue un rôle essentiel dans la théorie des processus aléatoires. C'est la vraie notion de temps aussi bien pour les développements mathématiques que pour la modélisation. Les prises de décision en présence d'une structure d'information doivent prendre en considération l'information disponible à la date courante, et les seuls temps alétoires qui sont perceptibles par un agent, dont la structure d'information est décrite par une filtration $\mathbb{F}$, sont les temps d'arrêt.

**Definition 4** *Un temps d'arrêt* $\upsilon$ *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *telle que*

$$\{\upsilon = n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

L'ensemble des temps d'arrêt est noté par $\mathcal{T}$ .

**Remark 5** *La généralisation de la notion de temps d'arrêt au temps continu est basée sur l'équivalence suivante:*

la variable aléatoire $\upsilon$ est un temps d'arrêt si et seulement si:

$$\{\upsilon \leq n\} \in \mathcal{F}_n \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

**Proposition 6** *Soit* $X = (X_n)_{\ n\geq 0}$ *un processus* $\mathbb{F}$*-adapté a valeurs dans* $(E, \varepsilon)$

Pour tout $A \in \varepsilon$ , on définit le premier temps d'atteinte :

$$T_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \ ,$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$.
$T_A$ est un temps d'arrêt.

**Proof.** Pour tout $n \geq 0, k \leq n$, on a $(X_k)^{-1}(A) \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ du fait que $X$ est $\mathbb{F}$-adapté. On déduit alors que $\{T_A \leq n\} = \cup_{k\leq n}\{X_k \ \in A\} = \cup_{k\leq n}(X_k)^{-1}(A)$ $\in \mathcal{F}_n$ . ■

**Stabilité des temps d'arrêt.**

**Proposition 7** $(i)$ *Soient* $\tau$ *et* $\theta$ *deux temps d'arrêt. Alors* $\tau \wedge \theta$, $\tau \vee \theta$, $\tau + \theta$ *sont des temps d'arrêt.*

$(ii)$ Soient $\tau$ un temps d'arrêt, et $c \geq 0$ une constante. Alors $\tau + c$ *et* $(1 + c)\tau$
sont des temps d'arrêt.
$(iii)$ Soit $(\tau_n)_{n\geq 0}$ une suite de temps d'arrêt. Alors $\liminf_n \tau_n$ et
$\limsup_n \tau_n$
sont des temps d'arrêt.
**Proof.** Exercice. □

■

**Proposition 8** *Soient* $\{X_n, n \geq 0\}$ *un processus aléatoire à valeurs dans un espace mesuré* $(E, \varepsilon)$*, et* $\tau$ *un temps d'arrêt. Alors, la fonction aléatoire*

$$X_\tau : \omega \in \Omega \longmapsto X_{\tau}(\omega)(\omega)$$

est une variable aléatoire.
**Proof.** Pour voir que $X_\tau$ est $\mathcal{A}$-mesurable, on écrit que pour tout $A \in \varepsilon$, ■

$$(X_k)^{-1}(A) = \cup_{k\geq 0}[\{\tau = k\} \cap (X_k)^{-1}(A)]$$

et on remarque que pour tout $k \geq 0$, les événements $\{\tau = k\}$, $(X_k)^{-1}(A)$ sont dans $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{A}$, donc leur intersection appartient à $\mathcal{A}$. Par suite $(X_k)^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ comme union dénombrable d'éléments de la $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}$. □

### 1.1.3 Histoire du processus et temps d'arrêt

On considére le temps d'arrêt qui prend une valeur $n$, L'ensemble des événements qui sont dans l'ensemble d'information disponible à la date $n$; est défini par:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} \quad : \quad A \cap \{\tau = n\}\} \in \mathcal{F}_n, \text{pour tout } n \geq 0\},$$

Il est clair que si $\tau = n \in \mathbb{N}$ est déterministe, alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$ définit bien une $\sigma$-algèbre. Ceci reste vrai grâce à la notion de temps d'arrêt

**Proposition 9** *Pour tout temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}$ , $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{A}$ est une sous- $\sigma$-algèbre de $\mathcal{A}$. Si $X$ est un processus aléatoire $\mathbb{F}$-adapté, $X_\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable*
***Proof.*** ***1-*** *Il est clair que $\emptyset \in F_\tau$ . Si $A \in \mathcal{F}_\tau$ alors $A^c \cap \{\tau = n\} = \{\tau = n\} \setminus (A \cap \{\tau = n\}\ ) = \{\tau = n\} \cap (A \cap \{\tau = n\})^c \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$, i.e. $A^c \in \mathcal{F}_n$ . Si $(A_i)_i \subset \mathcal{F}_\tau$ , alors $(\cup_i A_i) \cap \{\tau = n\} = (\cup_i (A_i \cap \{\tau = n\}) \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 0$, i.e. $\cup_i A_i \in \mathcal{F}_\tau$. Ainsi $\mathcal{F}_\tau$ est une $\sigma$-algèbre.* ■

**2-** On vérifie que $\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ .

**Exercise 10** *Pour un temps d'arrêt $\tau$ et un événement $A \in \mathcal{F}_\tau$, on définit*

$$\tau_A := \tau 1_A + \infty 1_{A^c}.$$

Montrer que $\tau_A$ est un temps d'arrêt.
**Propriétés**
Pour un temps d'arrêt $\tau$, on peut définir la notion d'éspérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_\tau$ satisfaisant les conditions habituelles.
La propriété des projections itérées de l'espérance conditionnelle est généralisée au cadre des temps d'arrêt:

**Proposition 11** *Soient $\tau$ et $\theta$ deux temps d'arrêt. Alors,$\{\tau \leq \theta\}, \{\tau \geq \theta\}$ et $\{\tau = \theta\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$, et pour toute v.a. $X$ intégrable, on a*

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\theta\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\theta]|\mathcal{F}_\tau\} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]$$

**Proof.** Pour tout $n \geq 0$, on a $\{\tau \leq \theta\} \cap \{\tau = n\} = \{\theta \geq n\} \cap \{\tau = n\} = \{\theta < n\}^c \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ , prouvant que $\{\tau \leq \theta\} \in \mathcal{F}_\tau$ . Par un argument similaire, on montre aussi que $\{\tau \leq \theta\} \in \mathcal{F}_\theta$ . ■
Pour la propriété d'espérance conditionnelle, il suffit de montrer pour une varialble aléatoire positive $X$ que $\mathbb{E}\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\theta\} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}] =: \xi$. En effet, pour tout $A \in \mathcal{F}_\theta$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi 1_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}]1_A 1_{\tau>\theta}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \sum_{i\geq 0}\sum_{j<i}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_j]1_A] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \sum_{i\geq 0}\sum_{j<i}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_i]1_A] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau\leq\theta}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A 1_{\tau>\theta}] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]1_A]
\end{aligned}
$$

□

**Exercise 12** *Soient*$(X_n)_{n\geq 0}$ *un processus aléatoire* $\mathbb{F}$*-adapté dans* $\mathbb{R}$*, et* $\tau$ *un temps d'arrêt. On suppose* $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$*. Alors*

$$\mathbb{V}ar[X_\tau] = \mathbb{E}\{\mathbb{V}ar[X|\mathcal{F}_\tau]\} + \mathbb{V}ar\{\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau]\}.$$

## 1.2 Exemples de processus

### Processus de comptage

**Definition 13** ***Motivation***
*Les processus de comptage modélisent de nombreux phénoménes. Considèrant le nombre d'accés de clients à un serveur durant une période* $(0, T)$*, on observe en fait un processus de comptage sur cet intervalle de temps. De même, le nombre de particules détectées par un capteur peuvent être modélisés par des processus de comptage.*

**Definition 14** ***Processus de comptage.*** *Un processus aléatoire* $\{N_t, t \geq 0\}$ *à valeurs entières est un processus de comptage si*

- $N_0 = 0$;
- $\forall s \leq t, N_s \leq N_t$.

**Remarque** Les trajectoires d'un processus de comptage sont des fonctions en escalier dont la taille des marches est aléatoire.

**Definition 15** ***Processus de Poisson.*** *Un processus aléatoire* $\{N_t, t \geq 0\}$ *à valeurs entières est un processus de Poisson de paramétre* $\lambda > 0$ *si*

- $(N_t)$ *est un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires, ( Voir la suite de cours: Processus aléatoires-Partie2)*
- *la variable* $N_t$*suit la loi de Poisson de paramétre* $\lambda t$

$$\forall n \geq 0 \ , \qquad P\left(N_t = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \ .$$

**Mouvement brownien**

**Motivation**

Le processus de Wiener ou mouvement brownien est le plus célèbre des processus à valeurs réelles. Il possède de nombreuses propriétés mathématiques : accroissements indépendants et stationnaires, processus gaussien, martingale, processus de Markov. ( voir la suite de cours: Processus aléatoires-Partie 2). Comme une conséquence du théorème de tendance vers la loi normale. Il intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes.

**Definition 16** ***Mouvement brownien****. Un processus aléatoire* $\{B_t; t \geq 0\}$ *à valeurs réelles est un processus de Wiener ou mouvement brownien standard si:*

- $(B_t)$ *est un processus à valeurs réelles à accroissements indépendants et stationnaires. ( Voir la suite de cours: Processus aléatoires-Partie2)*
- *la variable aléatoire* $B_t$ *suit la loi normale centrée* $N(0, t)$*. (Voir le chapitre 1- Rappels sur les probabilités et la théorie de mesure, partie variables aléatoires- Lois de probabilités)*