

T.D Chapitre 3

(Surfaces Paramétrées)

Exercice 1: Soit (Σ, M) la surface paramétrée définie par :

$$M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u + v^2, u^2 + v, u \cdot v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Déterminer les lignes coordonnées passant par le point $M(1,1)$.
- 2) Montrer que le point $M(1,1)$ est un point régulier de (Σ, M) .
- 3) Trouver l'équation cartésienne du plan tangent $\Pi_{M(1,1)}\Sigma$.
- 4) Déterminer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{K_M(1,1)}$ à Σ au point $M(1,1)$.

Solution :

1) Par définition (voir le cours), les lignes coordonnées passant par le point $M(u_0, v_0)$ sont des courbes tracées sur Σ , images des applications $M \circ \gamma_{v_0}: u \in I \rightarrow M \circ \gamma_{v_0}(u) = M(u, v_0) \in \mathbb{R}^3$, et $M \circ \gamma_{u_0}: v \in J \rightarrow M \circ \gamma_{u_0}(v) = M(u_0, v) \in \mathbb{R}^3$.

Les lignes coordonnées passant par le point $M(1,1)$ sont donc les courbes $M \circ \gamma_1(\mathbb{R})$ et $M \circ \gamma_1(\mathbb{R})$ respectivement paramétrisées par les applications suivantes :

$$M \circ \gamma_1(u) = M(u, 1) = (u + 1, u^2 + 1, u),$$

$$M \circ \gamma_1(v) = M(1, v) = (1 + v^2, 1 + v, v).$$

2) Si $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{d(M \circ \gamma_{v_0})}{du}(u_0) \right)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{d(M \circ \gamma_{u_0})}{dv}(v_0) \right)$ sont

linéairement indépendants, le point $M(u_0, v_0)$ est dit point régulier de (Σ, M) . Dans notre cas :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u, v) = (2v, 1, u).$$

Ceci implique

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1) = (1, 2, 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1) = (2, 1, 1).$$

Ces deux derniers vecteurs sont linéairement indépendants ; par conséquent $M(1,1)$ est un point régulier de (Σ, M) .

3) $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1)$ sont linéairement indépendants, donc il existe un plan tangent à Σ au point $M(1,1)$ de direction l'espace vectoriel engendré par $\left\{\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1)\right\}$.
 Déterminons l'équation cartésienne du plan tangent $\Pi_{M(1,1)}\Sigma$ à Σ au point $M(1,1) = (2, 2, 1)$.

Le point $P = (x, y, z) \in \Pi_{M(1,1)}\Sigma$ équivaut à $\overrightarrow{M(1,1)P} = \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1) + \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1)$, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{M(1,1)P}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1)$ sont liés. Ceci équivaut à :

$$\det \left(\overrightarrow{M(1,1)P}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(1,1), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(1,1) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2) + (y-2) - 3(z-1) = 0.$$

Par conséquent l'équation du plan tangent $\Pi_{M(1,1)}\Sigma$ est :

$$x + y - 3z - 1 = 0.$$

4) Par définition, le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{K_M(u_0, v_0)}$ à Σ au point $M(u_0, v_0)$ est égale à :

$$\overrightarrow{K_M(u_0, v_0)} = \frac{\overrightarrow{M'_u(u_0, v_0)} \wedge \overrightarrow{M'_v(u_0, v_0)}}{\left\| \overrightarrow{M'_u(u_0, v_0)} \wedge \overrightarrow{M'_v(u_0, v_0)} \right\|}.$$

$$\overrightarrow{M'_u(1,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(1,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \quad \text{donc} \quad \left\| \overrightarrow{M'_u(1,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(1,1)} \right\| =$$

$$\sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}.$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{K_M(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}).$$

Exercice 2: Soit (Σ, M) la surface paramétrée définie par :

$$M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (v \cos u, v \sin u, a \cdot v), \quad a \neq 0 \quad \text{et} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Déterminer les lignes coordonnées passant par le point $M(0,1)$.
- 2) Montrer que le point $M(0,1)$ est un point régulier de (Σ, M) .
- 3) Déterminer l'ensemble des points singuliers de (Σ, M) .
- 4) Trouver l'équation cartésienne du plan tangent $\Pi_{M(0,1)}\Sigma$.
- 5) Déterminer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{K_M(0,1)}$ à Σ au point $M(0,1)$.

Solution :

1) Les lignes coordonnées passant par le point $M(0,1) = (1, 0, a)$ sont les courbes $M \circ \gamma_1(\mathbb{R})$ et $M \circ \gamma_0(\mathbb{R})$, tracées sur Σ , respectivement paramétrisées par les applications suivantes :

$$M \circ \gamma_1(u) = M(u, 1) = (\cos u, \sin u, a),$$

$$M \circ \gamma_0(v) = M(0, v) = (v, 0, a \cdot v).$$

La ligne coordonnée paramétrisée par l'application $M \circ \gamma_1$ est le cercle horizontal centré sur l'axe Oz , de rayon 1 et dans le plan horizontal $z = a$.

La ligne coordonnée paramétrisée par l'application $M \circ \gamma_0$ est la droite située dans le plan vertical $y = 0$ et passant par les points $M(0,1) = (1, 0, a)$ et $M(0,0) = (0, 0, 0)$.

Σ est donc un cône de révolution d'axe Oz (voir figure ci-dessous).

2) Montrons que $M(0,1)$ est un point régulier de (Σ, M) .

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial u}}(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial v}}(u, v) = (\cos u, \sin u, a).$$

Ceci implique

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial u}}(0,1) = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial v}}(0,1) = (1, 0, a).$$

Ces deux derniers vecteurs sont linéairement indépendants ; par conséquent $M(0,1)$ est un point régulier de (Σ, M) .

3) Un point $M(u_0, v_0)$ est un point singulier de (Σ, M) si $\overrightarrow{M'_u(u_0, v_0)}$ et $\overrightarrow{M'_v(u_0, v_0)}$ sont liés.

Pour $v_0 \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{M'_u(u_0, v_0)}$ et $\overrightarrow{M'_v(u_0, v_0)}$ sont linéairement indépendants, puisque la troisième coordonnée du premier vecteur est nulle et la troisième coordonnée du

second vecteur est non nulle. Pour $v_0 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{M'_u(u_0, 0)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M'_v(u_0, v_0)}$ sont liés. Par conséquent, le seul point singulier de (Σ, M) est le point $M(u, 0) = (0, 0, 0)$, qui est le sommet du cône. En ce point le plan tangent n'est pas défini; en effet, le point $M(u, 0)$ est un point régulier pour les droites paramétrées (tracées sur Σ) suivantes :

$$\begin{aligned} M(0, v) &= (v, 0, a \cdot v), \\ M(\pi/2, v) &= (0, v, a \cdot v), \\ M(\pi, v) &= (-v, 0, a \cdot v), \end{aligned}$$

mais ces droites n'engendrent pas un plan. Par conséquent, il n'existe pas de plan tangent à Σ au point $M(u, 0) = (0, 0, 0)$.

4) Comme $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(0,1)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(0,1)$ sont linéairement indépendants, donc il existe un plan tangent à Σ au point $M(0,1)$ de direction l'espace vectoriel engendré par $\left\{ \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(0,1), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(0,1) \right\}$. Déterminons l'équation cartésienne du plan tangent $\Pi_{M(0,1)}\Sigma$ à Σ au point $M(0,1) = (1, 0, a)$.

Le point $P = (x, y, z) \in \Pi_{M(0,1)}\Sigma$ équivaut à $\overrightarrow{M(0,1)P} = \alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(0,1) + \beta \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(0,1)$, c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{M(0,1)P}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(0,1)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(0,1)$ sont liés. Ceci équivaut à :

$$\begin{aligned} \det \left(\overrightarrow{M(0,1)P}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(0,1), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(0,1) \right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z-a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x-1 & z-a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a(x-1) - (z-a) = ax - z = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation du plan tangent $\Pi_{M(0,1)}\Sigma$ est $z = ax$. Ce qui est équivalent à :

$$\Pi_{M(0,1)}\Sigma = \{(x, y, z) = (x, y, ax), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

5) Le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{K_M(0,1)}$ à Σ au point $M(0,1)$ est égale à:

$$\overrightarrow{K_M(0,1)} = \frac{\overrightarrow{M'_u(0,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(0,1)}}{\left\| \overrightarrow{M'_u(0,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(0,1)} \right\|}.$$

$$\overrightarrow{M'_u(0,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(0,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a\vec{i} - \vec{k}, \text{ donc } \left\| \overrightarrow{M'_u(0,1)} \wedge \overrightarrow{M'_v(0,1)} \right\| = \sqrt{a^2 + 1}.$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{K_M(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(a\vec{i} - \vec{k}).$$

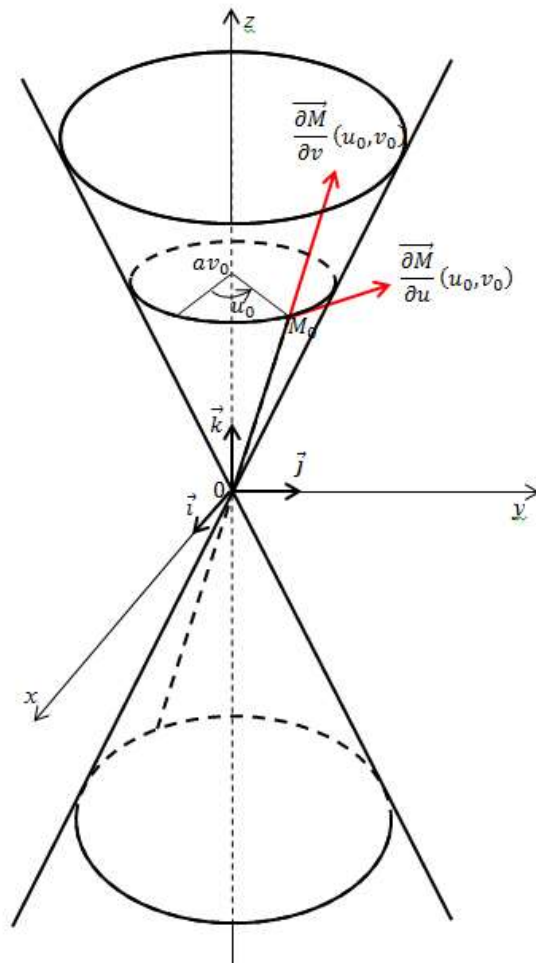


Figure 1:

Exercice 3: Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k ($k \geq 1$) et soit (Σ, M) la surface paramétrée définie par :

$$M(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Préciser dans quelle partie de l'espace (autre que Σ) sont situées les lignes coordonnées passant par un point $M(x_0, y_0)$.
- 2) Montrer que les surfaces paramétrées, définies comme ci-dessus, admettent un plan tangent en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 3) Pour la surface paramétrée (Σ, M) définie par :

$$M(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, x \cdot y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

déterminer les lignes coordonnées passant par un point quelconque $M(x_0, y_0)$ et trouver l'équation cartésienne des plans tangents $\Pi_{M(x_0, y_0)}\Sigma$.

Solution :

- 1) Les lignes coordonnées passant par un point $M(x_0, y_0)$ sont les courbes $M \circ \gamma_{x_0}(\mathbb{R})$ et $M \circ \gamma_{y_0}(\mathbb{R})$, tracées sur Σ , respectivement paramétrisées par les applications suivantes :

$$M \circ \gamma_{x_0}(y) = M(x_0, y) = (x_0, y, f(x_0, y)),$$

$$M \circ \gamma_{y_0}(x) = M(x, y_0) = (x, y_0, f(x, y_0)).$$

$M \circ \gamma_{x_0}(\mathbb{R})$ est située dans le plan vertical d'équation $x = x_0$.

$M \circ \gamma_{y_0}(\mathbb{R})$ est située dans le plan vertical d'équation $y = y_0$.

$$2) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

Pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x, y)$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la surface paramétrée (Σ, M) admet un plan tangent en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Autrement dit, une surface paramétrée définie par une fonction $z = f(x, y)$, $f \in C^k$ ($k \geq 1$), admet un plan tangent en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 3) i) Les lignes coordonnées passant par un point $M(x_0, y_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, x_0 \cdot y_0)$ sont les images des applications suivantes :

$$M \circ \gamma_{x_0}(y) = M(x_0, y) = (x_0, y, x_0 \cdot y),$$

$$M \circ \gamma_{y_0}(x) = M(x, y_0) = (x, y_0, x \cdot y_0).$$

La ligne coordonnée $M \circ \gamma_{x_0}(\mathbb{R}) \equiv \text{Im}(M \circ \gamma_{x_0})$ est la droite d'équation $z = x_0 \cdot y$ située dans le plan vertical d'équation $x = x_0$.

La ligne coordonnée $M \circ \gamma_{y_0}(\mathbb{R}) \equiv \text{Im}(M \circ \gamma_{y_0})$ est la droite d'équation $z = x \cdot y_0$ située dans le plan vertical d'équation $y = y_0$.

Il en résulte que par tout point de cette surface paramétrée passent deux droites tracées sur elle (voir figure ci-dessus).

Les vecteurs directeurs des droites $M \circ \gamma_{x_0}(\mathbb{R})$ et $M \circ \gamma_{y_0}(\mathbb{R})$ sont respectivement les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d(\overrightarrow{M \circ \gamma_{x_0}})}{dy}(y_0) = (0, 1, x_0) \text{ et } \frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d(\overrightarrow{M \circ \gamma_{y_0}})}{dx}(x_0) = (1, 0, y_0).$$

Cette surface passe par l'origine $(0, 0, 0)$ et en ce point les lignes coordonnées sont les axes Oy et Ox .

ii) On a déjà vu (exercices précédents) que l'équation cartésienne du plan tangent $\Pi_{M(x_0, y_0)}\Sigma$ est donnée par :

$$\det\left(\overrightarrow{M(x_0, y_0)P}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = 0,$$

où $P = (x, y, z)$ est un point quelconque de $\Pi_{M(x_0, y_0)}\Sigma$.

$$\det\left(\overrightarrow{M(x_0, y_0)P}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & x_0 \end{vmatrix} = -y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + z - z_0 = 0.$$

Par conséquent l'équation du plan tangent $\Pi_{M(x_0, y_0)}\Sigma$ est

$$z - z_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0).$$

Remarque: $z - z_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

C'est l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ à une surface paramétrée définie par une fonction de deux variables $f \in C^k$ ($k \geq 1$).

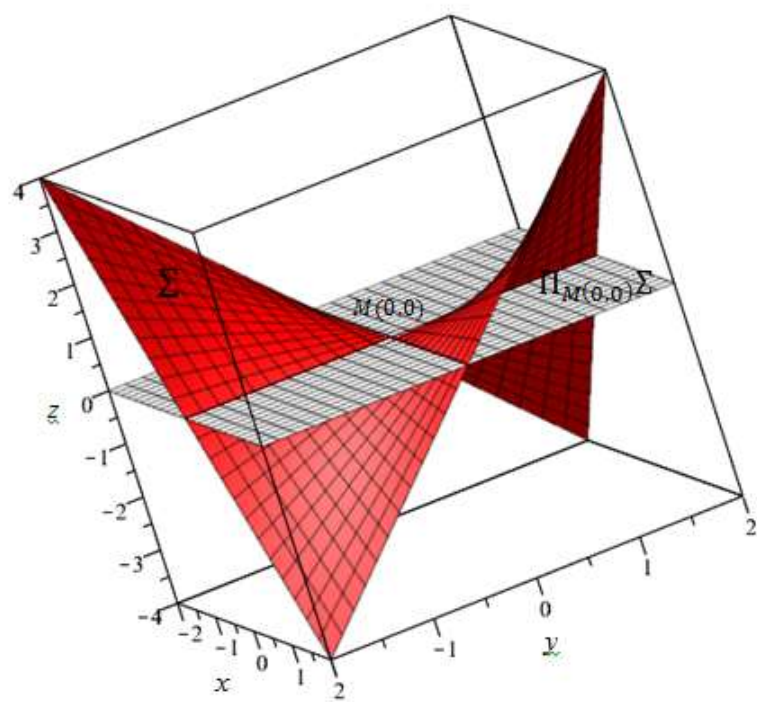


Figure 2: