I- Questions de cours

1- Ecrire l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système fermé lors d'une transformation infinitésimale.

$\Delta U = \delta Q - P_{ext}\, dV$

2- Montrer alors que pour un gaz parfait, lors d'une transformation élémentaire réversible, la variation d'entropie dS s'écrit :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T}$$

3- En intégrant l'équation obtenue, déterminer en fonction de T_1, T_2, V_1, V_2 et des constantes n, R et γ, la variation d'entropie $\Delta S(T,V)$ pour n moles d'un gaz parfait qui passe de l'état **1** (T_1,V_1) à l'état **2** (T_2,V_2).

II- Exercice

On fait subir à une mole d'un **gaz parfait** le cycle de transformations **réversibles** suivantes :

$1 \rightarrow 2$ Compression adiabate.

$2 \rightarrow 3$ Chauffage isobare.

$3 \rightarrow 4$ Détente adiabate.

$4 \rightarrow 1$ Refroidissement isochore.

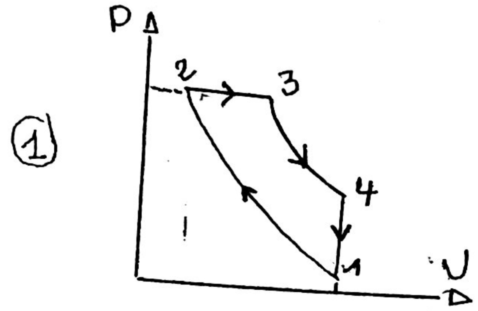
Chaque état **i** est défini par sa pression $\mathbf{P_i}$, sa température $\mathbf{T_i}$ et son volume $\mathbf{V_i}$ **(i variant de 1 à 4).**

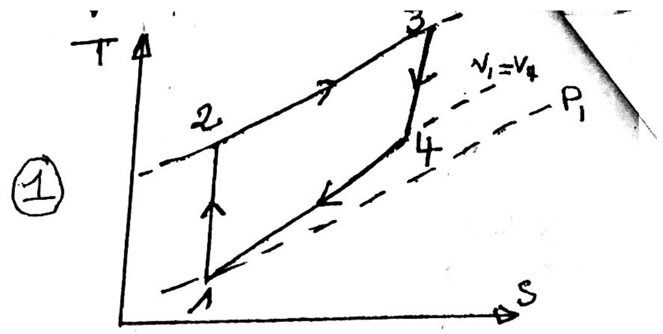
On pose $\alpha = \dfrac{V_1}{V_2}$ et $\beta = \dfrac{V_4}{V_3}$

R étant la constante universelle des gaz parfaits et γ le rapport des chaleurs molaires.

1. Représenter qualitativement le cycle des transformations sur les diagrammes (P,V) et (T,S).
2. Déterminer l'expression de :
   a. la pression P_2 en fonction de α, γ et P_1
   b. la température T_2 en fonction de α , γ et T_1
   c. la pression P_3 à l'état 3 en fonction de α, γ et P_1
   d. température T_3 à l'état 3 en fonction de α, β, γ et T_1
   e. la pression P_4 à l'état 4 en fonction de α, β, γ et P_1
   f. la température T_4 à l'état 4 en fonction de α, β , γ et T_1
3. Déterminer en fonctions de n, R, T_1,α, β, et γ, les énergies travail et chaleur mises en jeu le long de chaque transformation. Préciser le sens des échanges.
4. En déduire la variation d'énergie interne ΔU le long de chaque transformation et puis sur tout le cycle.
5. Déterminer la variation d'entropie ΔS pour chaque transformation, déduire ΔS_{cycle}.
6. Déterminer l'expression du rendement (ou efficacité) ε du cycle en fonction de γ, α et β.

1°)





2°) 1-2 est une adiabate réversible

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \Rightarrow P_2 = P_1 . \alpha^\gamma \quad (0,5)$$

en 2 : $P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_1 . \alpha^\gamma V_2}{nR} = \frac{T_1}{V_1} . V_2 . \alpha^\gamma$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 . \alpha^{\gamma - 1} \quad (0,5)$$

$$P_3 = P_2 = P_1 . \alpha^\gamma . \quad (0,5)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_2 V_2 = nRT_2 \\ P_3 V_3 = nRT_3 \end{array}\right\} \Rightarrow T_3 = T_2 \frac{P_3 V_3}{P_2 V_2} = T_1 . \alpha^{\gamma-1} . \frac{V_3}{V_4} . \frac{V_4}{V_2}$$

$$T_3 = T_1 \alpha^{\gamma - 1} . \frac{1}{\beta} . \alpha \Rightarrow T_3 = T_1 . \frac{\alpha^\gamma}{\beta} \quad (0,5)$$

3-4 est une adiabate rev. $\Rightarrow P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma$

$$P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma = P_1 . \alpha^\gamma \left(\frac{1}{\beta}\right)^\gamma$$

$$P_4 = P_1 . \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma \quad (0,5)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_4 V_4 = nRT_4 \\ P_1 V_1 = nRT_1 \end{array}\right\} \Rightarrow T_4 = T_1 . \frac{P_4}{P_1} . \frac{V_4}{V_1} \Rightarrow T_4 = T_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma \quad (0,5)$$

3°) $W_{12} = \Delta U_{12} \quad (Q_{12} = 0)$

$= m.c_v (T_2 - T_1)$ ou $n \mathcal{C}_v . (T_2 - T_1)$ avec $\mathcal{C}_v$: chaleur molaire

$c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \Rightarrow m.c_v = \frac{mr}{\gamma - 1} = \frac{nR}{\gamma - 1}, n\mathcal{C}_p = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$

$$W_{12} = \frac{mR}{\gamma-1}\left(T_1\alpha^{\gamma-1} - T_1\right) = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(\alpha^{\gamma-1}-1\right) > 0$$

$$W_{23} = -P_2(V_3-V_2) = P_2V_2 - P_3V_3 = mR(T_2-T_3)$$

(0,5) $$W_{23} = mRT_1\left(\alpha^{\gamma-1} - \frac{\alpha^\gamma}{\beta}\right) = mRT_1\alpha^\gamma\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) < 0$$

$$W_{34} = \Delta U_{34} = mc_v(T_4-T_3) = \frac{mR}{\gamma-1}\left(T_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma - T_1\frac{\alpha^\gamma}{\beta}\right)$$

(0,5) $$W_{34} = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\left(1-\beta^{\gamma-1}\right) < 0$$

(0,5) $$W_{41} = 0$$

(1) $Q_{12} = Q_{34} = 0$

2-3 est isobare $\Rightarrow Q_{23} = mc_p(T_3-T_2)$ ou $mC_p(T_3-T_2)$

(0,5) $$Q_{23} = \frac{mR\gamma}{\gamma-1}\left(T_1\frac{\alpha^\gamma}{\beta} - T_1\alpha^{\gamma-1}\right) = \frac{mR\gamma}{\gamma-1}T_1\alpha^{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right) > 0$$

(0,5) $$Q_{41} = \Delta U_{41} = mc_v(T_1-T_4)$$

$$= \frac{mR}{\gamma-1}\left(T_1 - T_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\right) = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\right) < 0$$

4°) $$\Delta U_{12} = W_{12} = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(\alpha^{\gamma-1}-1\right)$$ (0,5)

$\Delta U_{23} = Q_{23} + W_{23}$ ou $\Delta U_{23} = mc_v(T_3-T_2)$

$$\Rightarrow \Delta U_{23} = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\alpha^\gamma\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)$$ (0,5)

$$\Delta U_{34} = W_{34} = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\left(1-\beta^{\gamma-1}\right)$$ (0,5)

$$\Delta U_{41} = Q_{41} = \frac{mRT_1}{\gamma-1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\right)$$ (0,5)

$$\Delta U_{cycle} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41}$$

$$\Delta U_{cycle} = \frac{nRT_1}{\gamma-1}\left[\alpha^{\gamma-1} - 1 + \frac{\alpha^\gamma}{\beta} - \alpha^{\gamma-1} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma - \frac{\alpha^\gamma}{\beta} + 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma\right]$$

(1) $\Delta U_{cycle} = 0$ (U fction d'état)

5°) (0,5) $\Delta S_{12} = \Delta S_{34} = 0$ (Transf. adiabate rév. ⇒ isentrope)

(0,5) $\Delta S_{23} = m\, c_p \ln \frac{T_3}{T_2}$ ou $n.\, C_p \ln \frac{T_3}{T_2}$

$$= \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{\alpha}{\beta}$$

(0,5) $\Delta S_{41} = m\, c_v \ln \frac{T_1}{T_4} = -\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{\alpha}{\beta}$

(0,5) $\Delta S_{cycle} = 0$ (S fction d'état)

6°) $\varepsilon = \frac{\text{énergie utile}}{\text{energie dépensée}} = \frac{-W}{Q_{23}}$ (1)

$$= \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma - 1}{\gamma . \alpha^\gamma \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$ (1)

$\alpha > \beta \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$

Questions de cours :

1) 1°) Expression du 1er ppe pour un syst fermé : (1)

$$dU = \delta Q + \delta W$$

(1) 2°) transf. réversible $\Rightarrow \delta W = -PdV$ et $dS = \frac{\delta Q}{T}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\delta Q = TdS \\ \delta W = -PdV\end{array}\right\} \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T}$$

(2) 3°) Gaz parfait $\Rightarrow dU = m.c_v.dT$ (2)

$$\Delta S = \int dS = mc_v \int \frac{dT}{T} + mr \int \frac{dV}{V}$$ (c_v : chal. massique

ou

$$\Delta S = \int dS = n C_v \int \frac{dT}{T} + nR \int \frac{dV}{V}$$ (C_v : chal. molaire

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = nR \left[\frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right]$$

Questions de cours (7,5 points)

1. Gaz parfait

Choisir deux phrases parmi les quatre proposées ci-dessous, pour compléter cette définition:

"Un gaz parfait est un ensemble d'atomes ou de molécules contenus dans un volume V dont : ....".

Les interactions entres les atomes ou les molécules sont fortes,

Les interactions entres les atomes ou les molécules sont faibles,

Le volume propre des atomes ou des molécules est grand devant le volume du gaz,

Le volume propre des atomes ou des molécules est petit devant le volume du gaz.

2. Travail des forces de pression

Pour une transformation quelconque, laquelle de ces expression est vraie?

$\delta W = P_{ext} dV$, $\delta W = -P_{ext} dV$ ou $\delta W = -P\,dV$, où P est la pression et V le volume du gaz étudié.

3. Chaleur

Donnez les expressions de la chaleur δQ pour un gaz parfait, en coordonnées (T,V) et en coordonnées (T,P).

4. Transformation adiabatique réversible

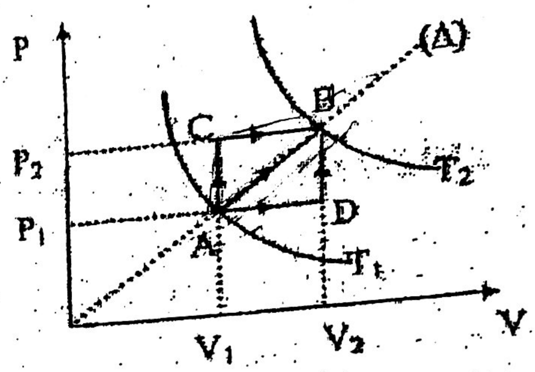
Donner l'équation d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait en coordonnées (P,T).

5. Premier principe:

Compléter la définition suivante : "Si au cours d'une transformation d'un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre final, il y a échange de travail et de chaleur avec le milieu extérieur, ...".

Exercice (12.5 points)

Un gaz parfait de n moles, pour lequel la chaleur spécifique molaire $c_v=(5/2)R$, est pris dans les conditions du point A dans la figure ci-contre. On lui fait décrire le chemin AB de 3 manières différentes :



- le trajet ACB;
- le trajet ADB;
- le trajet AB coïncidant avec la droite (Δ) de pente 1 dans le plan (P,V), avec
- $P_2=2P_1$ et $V_2=2V_1$.

***Remarques:** les lettres Q, W et U désignent respectivement: la chaleur, le travail et l'énergie interne.*

Questions:
On donnera les réponses en fonction de R et T_1. (R étant la constante des gaz parfaits).

$P_1 V_1 = n R T_1$

1) Les températures
   a. Calculer T_2 en fonction de T_1
   b. Calculer T_C en fonction de T_1
   c. Calculer T_D en fonction de T_1

2) Pour le trajet (ACB).
   a. Donner la nature de la transformation (AC) puis calculer W_{AC} et Q_{AC}.
   b. Donner la nature de la transformation (CB) puis calculer W_{CB} et Q_{CB}.
   c. Calculer W_{ACB} et Q_{ACB}

3) Pour le trajet (ADB)
   a. Donner la nature de la transformation (AD) puis calculer W_{AD} et Q_{AD}
   b. Donner la nature de la transformation (DB) puis calculer W_{DB} et Q_{DB}.
   c. Calculer W_{ADB} et Q_{ADB}.

4) Pour le trajet (AB)
   a. Calculer la variation de l'énergie interne ΔU_{AB}
   b. Calculer W_{AB}
   c. En déduire Q_{AB}.

5) Calculer la variation de l'énergie interne totale au cours du cycle (ACBDA). Ce résultat est-il prévisible? Justifier votre réponse.

Cours 8

1- gaz parfait :

Un gaz parfait est un ensemble d'atomes ou de molécules contenus dans un volume V dont : les interactions entres d'atomes ou de molécules sont faibles et le volume propre des atomes ou des molécules est petit devant le volume du gaz

2- Travail des forces de pression :

pour une transformation quelconque $\delta W = - P_{ext}\, dV$ est vraie.

3- chaleur (gaz parfait)

- l'expression de la chaleur δQ pour un gaz parfait en coordonnées (T,V) est : $\delta Q = C_v\, dT + P\, dV$
- l'expression de la chaleur δQ pour un gaz parfait en coordonnées (P,T) est : $\delta Q = C_p\, dT + h\, dP$

$$\delta Q = C_p\, dT - V\, dP$$

pour un gaz parfait

$\ell = P \quad , h = -V$

4- Transformation adiabatique réversible :

$$PV^{\gamma} = C$$

5- Premier principe :

si au cours d'une transformation d'un système d'un état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre, il y a échange de travail et de chaleur avec le milieu exterieur, La variation de l'énergie interne est à la somme algébrique des travaux et des chaleurs échangés avec le milieu extérieur

$$\Delta U = Q + W$$

Exercice 2 :

1/ Les températures :

(a) on a ① $P_1 V_1 = nRT_1$ avec $P_2 = 2P_1$

$P_2 V_2 = nRT_2$, $V_2 = 2V_1$

$\Rightarrow 2P_1 \times 2V_1 = nRT_2$ (2)

$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 4T_1}$

(b)

Au point C on a : $P_2 V_1 = nRT_C$

avec $P_2 = 2P_1 \Rightarrow 2P_1 V_1 = nRT_C$ ①

et $P_1 V_1 = nRT_1$ ② au point A

$\frac{①}{②} \Rightarrow 2 = \frac{T_C}{T_1} \Rightarrow \boxed{T_C = 2T_1}$

(c) Au point D on a $D(P_1, V_2, T_D)$

$P_1 V_2 = nRT_D$ ① avec $V_2 = 2V_1$

et $P_1 V_1 = nRT_1$ ② au point (A)

$\frac{①}{②} \Rightarrow 2 = \frac{T_D}{T_1} \Rightarrow \boxed{T_D = 2T_1}$

② le Trajet (ACB)

a - Du point A au point C, il y a une compression isochore

donc $dV = 0 \Rightarrow W_{AC} = -\int_A^C p\,dV = 0$

$\boxed{W_{AC} = 0}$

- la chaleur Q_{AC}

on a $\delta Q = C_V\,dT + \ell\,\overset{=0}{dV}$

$\Rightarrow \quad \delta Q = C_V\, dT$

$C_V = n\, c_v$

$Q_{AC} = n\, c_v\, (T_C - T_A)$ avec $\begin{cases} T_C = 2T_1 \\ T_A = T_1 \\ c_v = \frac{5}{2} R \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{AC} = \frac{5}{2}\, n R T_1}$

(b) - Du point C au point B, il y a une transformation ~~isot~~ isobare.

pour $W_{CB} = -\int_C^B p\, dV \qquad B(P_2, V_2)$

on a $W_{CB} = +\int_B^C p\, dV = -P_2 (V_C - V_B)$

et $P_2 = 2P_1, \quad V_C = V_1, \quad V_B = V_2$

$\Rightarrow W_{CB} = +2P_1 (V_1 - V_2) = +2P_1 (V_1 - 2V_1)$

$W_{CB} = -2P_1 V_1 = -2nRT_1$

$\boxed{W_{CB} = -2nRT_1}$

+ pour δQ

on $\delta Q = C_p\, dT + h\, \overset{0}{dp}$

$Q_{CB} = n\, c_p\, (T_B - T_C)$ avec $\begin{cases} C_p = n\, c_p \\ T_C = 2T_1 \\ T_B = T_2 = 4T_1 \end{cases}$

$\Rightarrow Q_{CB} = n\, c_p\, (4T_1 - 2T_1)$

$= + n\, c_p\, 2T_1$

avec $C_p - C_V = nR$

$\Rightarrow c_p - c_v = R \quad \Rightarrow c_p = R + c_v = R + \frac{5}{2} R =$

$\Rightarrow c_p = \frac{7}{2} R$

finalement $\boxed{Q_{CB} = +7nRT_1}$

(c) $W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = 0 + (-2nRT_1)$

5/ calcul de l'énergie interne totale fournie au cours du cycle ACBDA.

$$\Delta U_{ACBDA} = W_{ACBDA} + Q_{ACBDA} = W_{ACB} + W_{BDA} + Q_{ACB} + Q_{BDA}$$

or $W_{ACB} = -2P_1V_1 = 2nRT_1$

$$Q_{ACB} = \frac{19}{2}\, nRT_1$$

$$W_{BDA} = -W_{ADB} = nRT_1$$

$$Q_{BDA} = -Q_{ADB} = -\frac{17}{2}\, nRT_1$$

donc $\Delta U_{ACBDA} = -2nRT_1 + \frac{19}{2}\, nRT_1 + nRT_1 - \frac{17}{2}\, nRT_1$

$$= -nRT_1 + \frac{19-17}{2}\, nRT_1$$

$$= -nRT_1 + nRT_1$$

$$= 0$$

$$\boxed{\Delta U_{ACBDA} = 0}$$

* Ce résulta est prévisible car $\Delta U = 0$ pour un cycle;
U étant une fonction d'état.