

TP 6 Traitement du signal
MASTER SYSTEMES DE TELECOM
Synthèse des filtres RII

1 Rappel sur les filtres RII

Les filtres RII sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps et dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est de durée infinie (contient un nombre infini d'échantillons). A cet effet, il est impossible de l'implémenter sous forme d'une convolution discrète comme c'est souvent le cas pour les filtres RIF.

L'implémentation ou bien la description mathématique des filtres numériques RII est par conséquent assurée à l'aide d'une équation aux différences finies. Ainsi, chaque échantillon de sortie $y(n)$ (à l'instant présent n) est calculé par sommation pondérée d'un certain nombre d'échantillons de l'entrée (échantillon à l'instant présent $x(n)$ et quelques échantillons d'entrée aux instants passés) et d'un certain nombre d'échantillons de sortie aux instants passés. Autrement dit, les filtres RII possèdent une structure récursive.

$$y(n) = \sum_{l=0}^M b_l x(n-l) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

Où $N \geq M$ est appelé ordre du filtre.

A partir de cette équation nous pouvons donc déduire la fonction de transfert en z d'un filtre RII qui est généralement sous forme d'un rapport avec un numérateur en z^{-1} d'ordre M et un autre polynôme en z^{-1} dans le dénominateur d'ordre N .

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Ainsi, les filtres RII possèdent des zéros (les racines du numérateur de $H(z)$) et des pôles (les racines du dénominateur de $H(z)$). Un filtre RII est stable si tous ses pôles se trouvent à l'intérieur du cercle unitaire du plan z .

2 Méthodes de synthèse des filtres RII

Souvent la synthèse d'un filtre numérique repose une méthode de transformation d'un filtre analogique de référence. Plusieurs méthodes de transformation d'un filtre analogique de référence en un filtre numérique existent. Nous citons entre autres :

- Transformation bilinéaire
- Transformation par invariance impulsionnelle
- Transformation par dérivation
-etc

La transformation bilinéaire est la plus utilisée :

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Où T est le pas d'échantillonnage

Elle sauvegarde les principales caractéristiques du filtre analogique de référence dans le filtre numériques réalisé, notamment la stabilité. Néanmoins, elle introduit une certaine déformation sous forme de compression des fréquences entre le filtre analogique de référence et le filtre numérique réalisé.

Parmi les filtres analogiques de référence les plus utilisés dans ce cas nous citons

- Filtres de Butterworth
- Filtres de Tchebychev I et II
- Filtres elliptiques ou de Cauer
- ...etc

3. Travail à réaliser (sous forme d'une étude)

Nous réaliser un filtre passe-bas à partir de trois types de filtres analogiques:

- les filtres de Butterworth,
- les filtres de Tchebychev
- les filtres elliptiques

3.1 Gabarit

On commence par donner le gabarit du filtre numérique que nous souhaitons obtenir.

$f_e = 1000\text{Hz}$, ☐ *fréquence d'échantillonnage*

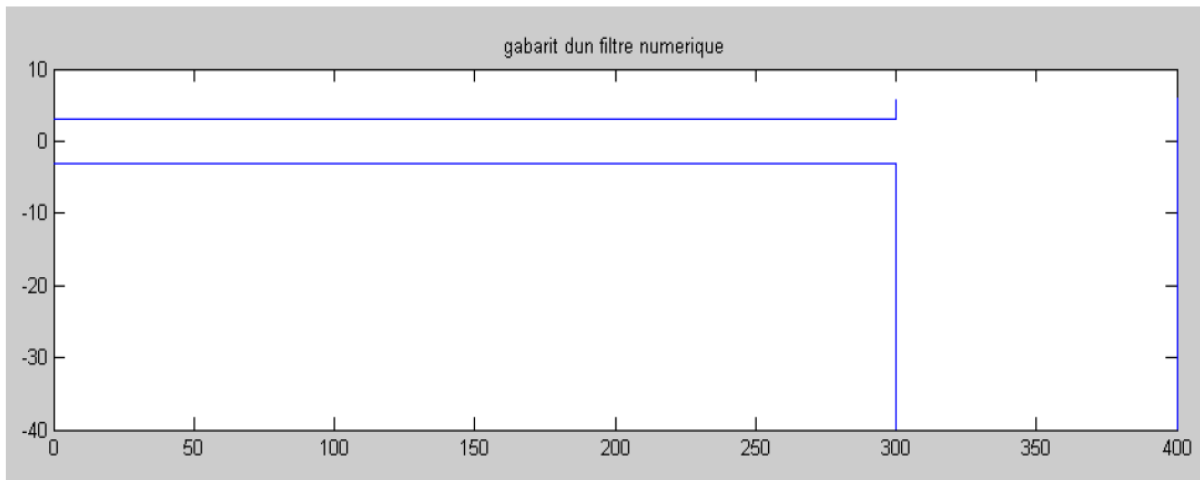
$f_{n1} = 300\text{Hz}$; ☐ *fin bande passante*

$f_{n2} = 400\text{Hz}$, ☐ *début bande atténuée*

$\Delta_1 = 3\text{dB}$, ☐ *atténuation*

$\Delta_2 = 40\text{ dB}$ ☐ *atténuation*

f_{n1} et f_{n2} représentent des fréquences pour un filtre numérique

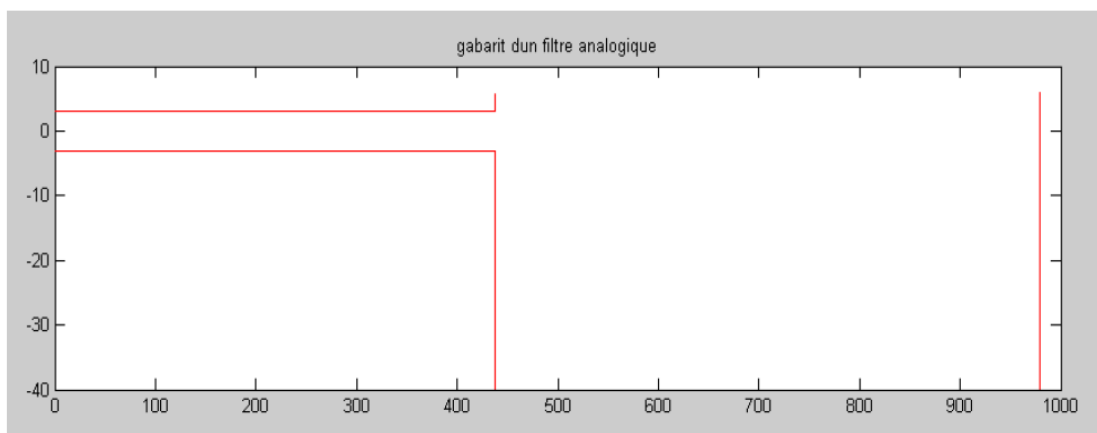


Nous devons donc commencer par identifier le filtre analogique de référence. Autrement dit, trouver le gabarit du filtre analogique de référence. Nous devons prendre en considération que la transformation bilinéaire (passage de l'analogique au numérique) introduit une certaine déformation dans les fréquences (une sorte de compression de fréquence). Ainsi, le gabarit analogique ne sera pas exactement le même que le gabarit numérique.

Pour trouver le gabarit du filtre analogique nous devons utiliser l'expression suivante qui lie les fréquences analogiques aux fréquences numériques dans le cas de la transformation bilinéaire.

$$\omega_{analogique} \frac{T}{2} = tg \left(\omega_{numérique} \frac{T}{2} \right)$$

Vérifiez que nous obtenons bien les valeurs suivantes: fa1 = 438 Hz, fa2 = 976 Hz. On a donc le gabarit analogique suivant :



3.2 Synthèse à partir des filtres analogiques

Dans un premier temps nous évaluerons les filtres de type Butterworth, Tchebychev et elliptique à l'aide des fonctions **buttord**, **cheb1ord** et **ellipord** puis de manière théorique en utilisant la formule théorique donnée dans le TP.

3.2.1 Evaluation de l'ordre des filtres de Butterworth, Tchebychev et elliptique

3.2.1.1 Calcul de l'ordre du filtre par les fonctions Matlab

Les fonctions **buttord**, **cheb1ord** et **ellipord** se construisent sur cette base :

```
[N, Wn] = buttord (Wp, Ws, Rp, Rs, 's')  
[N, Wn] = cheb1ord (Wp, Ws, Rp, Rs, 's')  
[N, Wn] = ellipord (Wp, Ws, Rp, Rs, 's')
```

Elles prennent en paramètres :

- Pulsation de fin de bande passante
- Pulsation dans la bande atténuée
- Atténuation delta1
- Atténuation delta2

Elles retournent l'ordre du filtre (N) et la pulsation de coupure (Wn)

A l'aide de ces formules nous avons pu calculer l'ordre des filtres numériques et analogiques :

- Butterworth : N = 6
- Tchebychev : N = 4
- Elliptique : N = 3

(Lors de l'utilisation des fonctions **buttord**, **cheb1ord** et **ellipord**, il faut faire attention de normaliser les fréquences par rapport à $f_e/2$)

Aussi, pour le TP, nous avons procédé comme suit (exemple avec le filtre de Butterworth) :

En Analogique : [NBa, WnBa] = BUTTORD (2*pi*fa1, fa2*2*pi, D1, D2, 's')

En Numérique : [NBn, WnBn] = BUTTORD (fn1/ (fe/2), fn2/ (fe/2), D1, D2)

3.2.1.2 Calcul de l'ordre du filtre de manière théorique

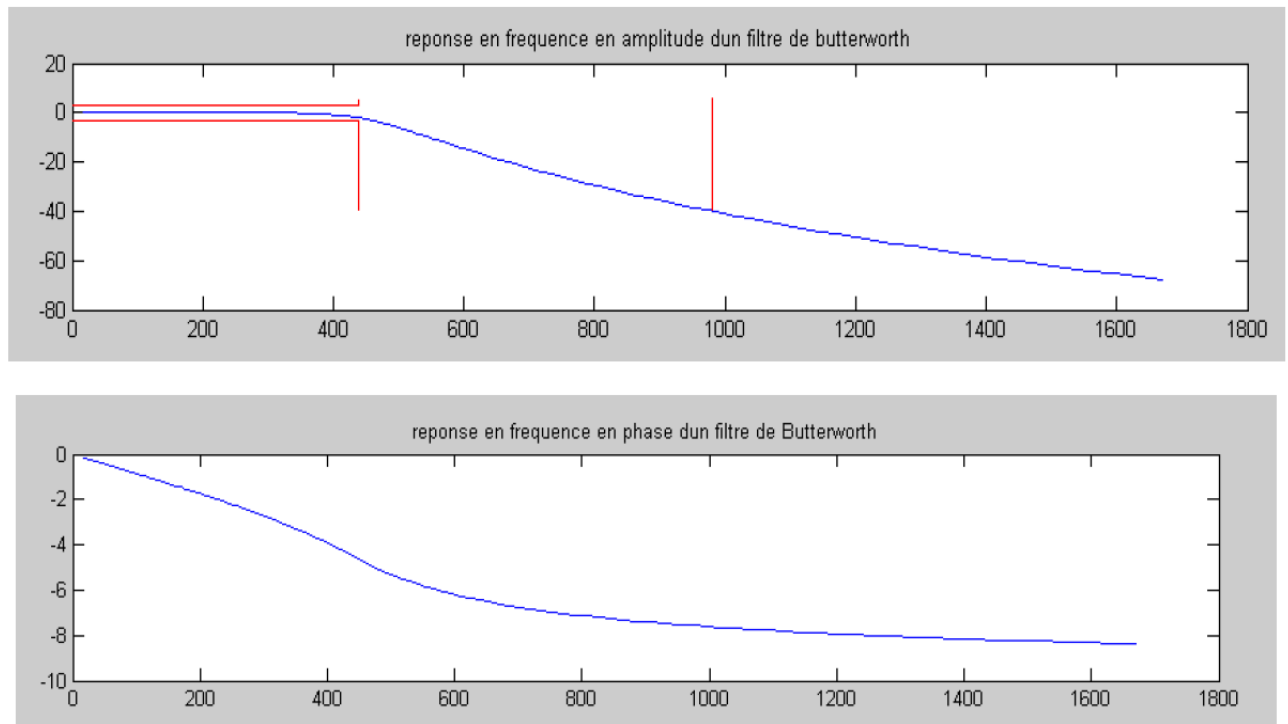
De manière théorique, nous avons utilisé la formule suivante pour le filtre de Butterworth :

$$N = \text{ceil} \left(\frac{\log_{10} (1 / (\delta_2 \sqrt{2 \delta_1}))}{\log_{10} (\tan (\pi f_{n2} / f_e)) - \log_{10} (\tan (\pi f_{n1} / f_e))} \right)$$

La formule théorique nous donnait un ordre N égale à 6 (arrondi grâce à la fonction « ceil ») ce qui vérifie les fonctions de Matlab utilisées précédemment. On retrouve bien les résultats précédents.

3.2.2 Synthèse des filtres analogiques normalisés pour N=6

3.2.2.1 Les filtres analogiques de Butterworth



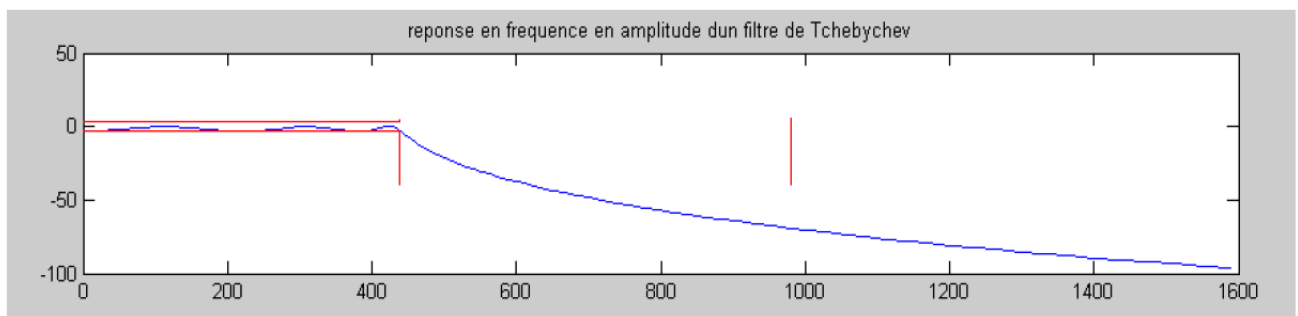
D'après le tracé, on remarque que la courbe est bien à l'intérieur du gabarit, le filtre de Butterworth possède la réponse la plus plate à l'origine. Le gain monotone en fonction de la fréquence (sans oscillation).

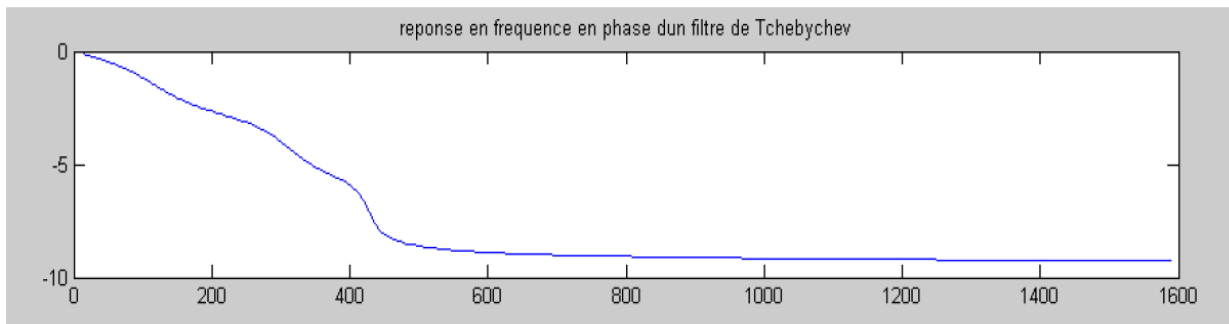
D'un autre côté, la phase tend à être la plus linéaire possible.

Coefficients obtenus (sans normalisation) :

- **Numerator :** 1
- **Dénominateur :** 1.0000 3.8637 7.4641 9.1416 7.4641 3.8637 1.0000

3.2.2.2 Les filtres analogiques de Tchebychev



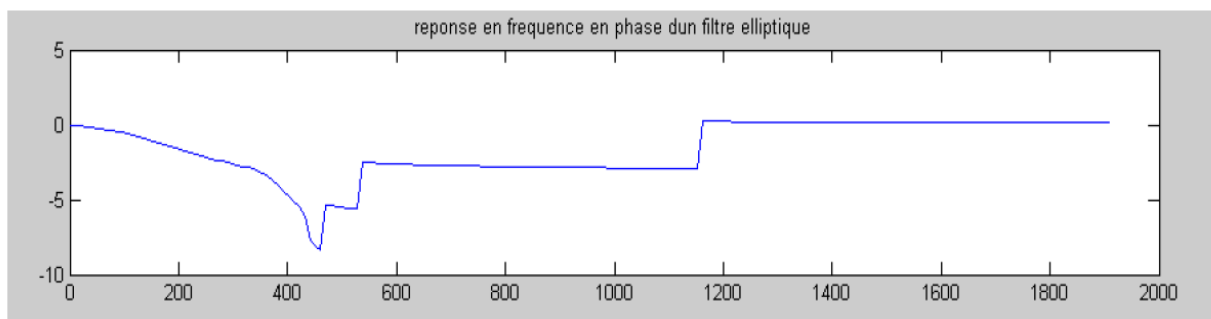
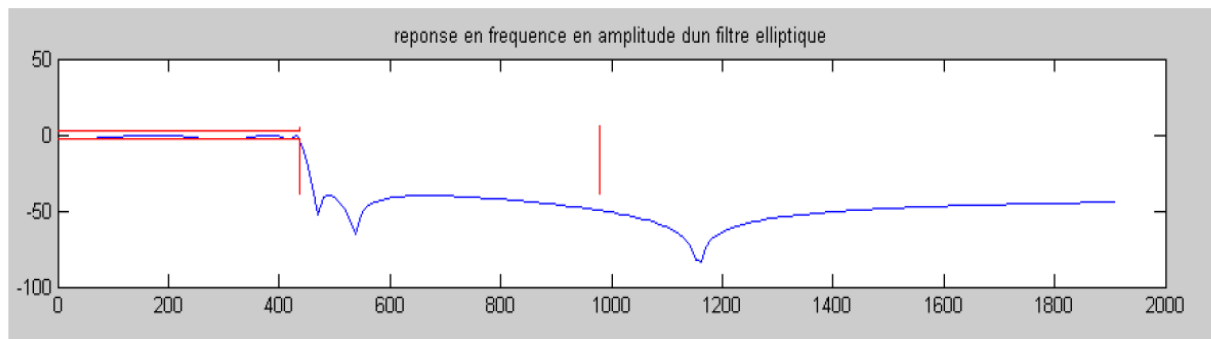


De la même manière qu'avec le filtre de Butterworth la réponse est bien à l'intérieur du gabarit et oscille entre 3dB et -3dB en bande passante ce qui est une caractéristique des filtres de Tchebychev. On a donc des oscillations en bande passante, monotone en bande atténuée.

Coefficients obtenus (sans normalisation) :

- **Numérateur :** 0.0313
- **Dénominateur :** 1.0000 0.5707 - 0.0000i 1.6628 - 0.0000i 0.6906 - 0.0000i
0.6991 - 0.0000i

3.2.2.3 Les filtres analogiques elliptiques



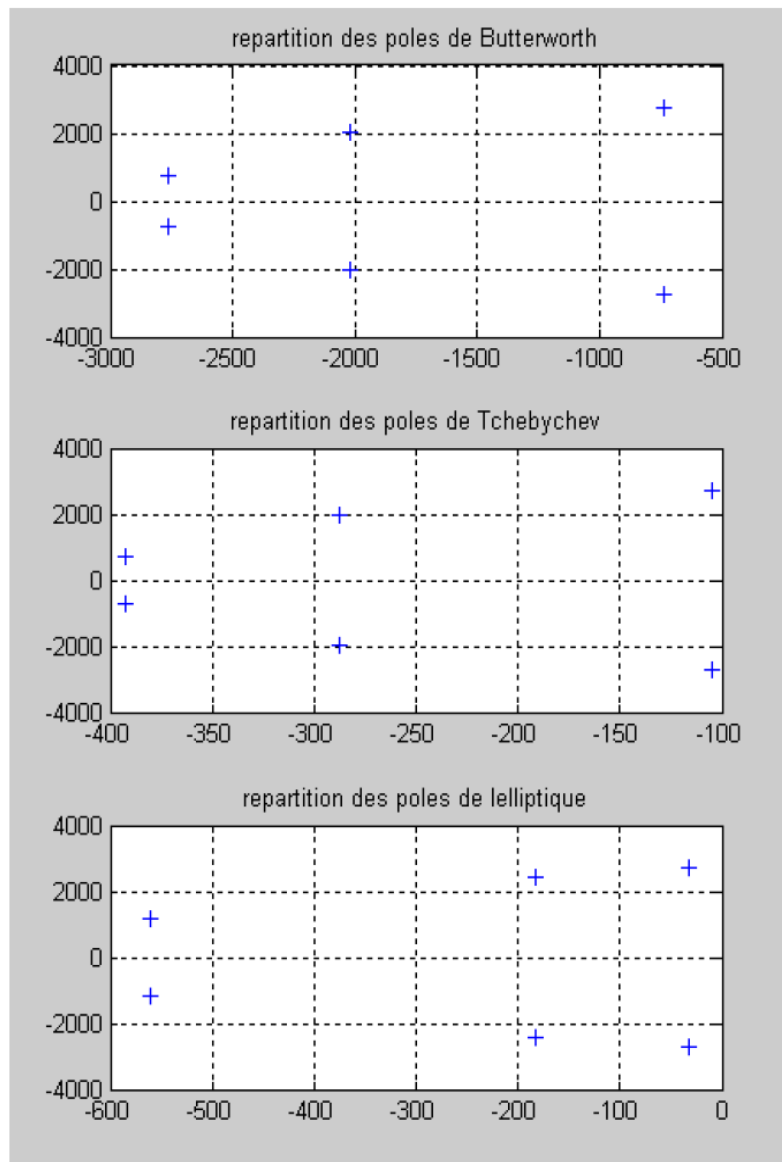
On remarque ici que la réponse se trouve bien à l'intérieur du gabarit. De plus elle possède une pente plus raide à partir de la fréquence de coupure. C'est celui qui répond le mieux à la spécification d'un gabarit. En contre partie, l'atténuation est plus faible en bande atténuée.

Coefficients obtenus (sans normalisation) :

- **Numérateur :** 0.0100 0 0.0961 0 0.2007 0 0.1189
- **Dénominateur :** 1.0000 0.5641 2.0530 0.9059 1.2178 0.3469 0.1679

3.2.4 Distribution des poles des differents filtres

On s'intéresse ici à la distribution des poles de la fonctions de transfert des trois filtres étudiés.



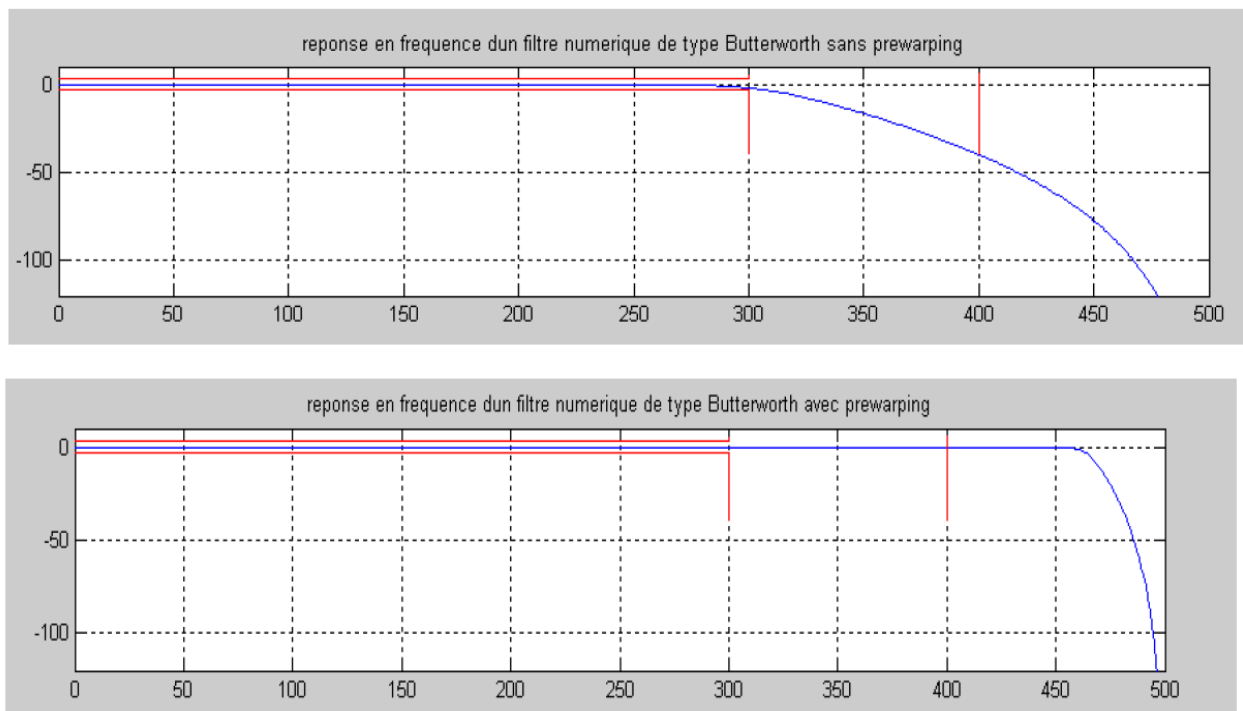
Butterworth	Les pôles sont par paires conjuguées et à partie réelle négative pour respecter la stabilité. Ce sont les racines douzièmes de l'unité, ils ont donc pour module 1.
Tchebychev	Les pôles sont par paires conjuguées et à partie réelle négative pour respecter la stabilité.
elliptique	Les pôles sont par paires conjuguées et à partie réelle négative pour respecter la stabilité.

3.2.5 Transformation bilinéaire

Il s'agit d'établir une correspondance appropriée entre les deux domaines analogiques et numérique : cette correspondance est connue sous le terme de transformation bilinéaire. Elle permet de transformer un filtre analogique stable en un filtre numérique stable. Le but étant de préserver la réponse en fréquence, préserver la stabilité du filtre et d'éviter les problèmes de spectres.

Pour obtenir la réponse attendue, la transformation s'applique sur les coefficients du domaine continu sans normalisation en fréquence. Ce qui est tout à fait normal sinon la fréquence de coupure n'interviendrait à aucun moment.

3.2.5.1 Transformation bilinéaire de Butterworth

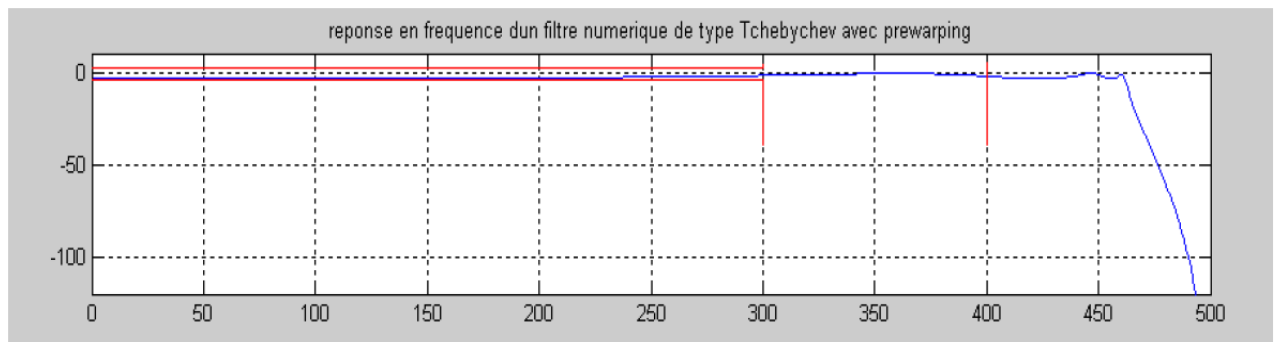
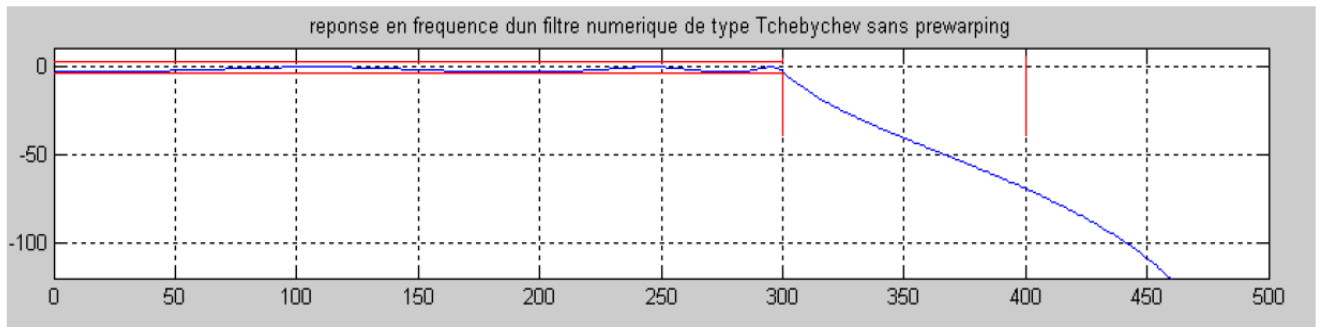


La courbe est bien dans le gabarit on a les fréquences normalisées par rapport à $f_c/2$ donc 1 correspond à 500Hz, on a bien $f_{n1} = 300\text{Hz}$ comme fréquence de coupure.

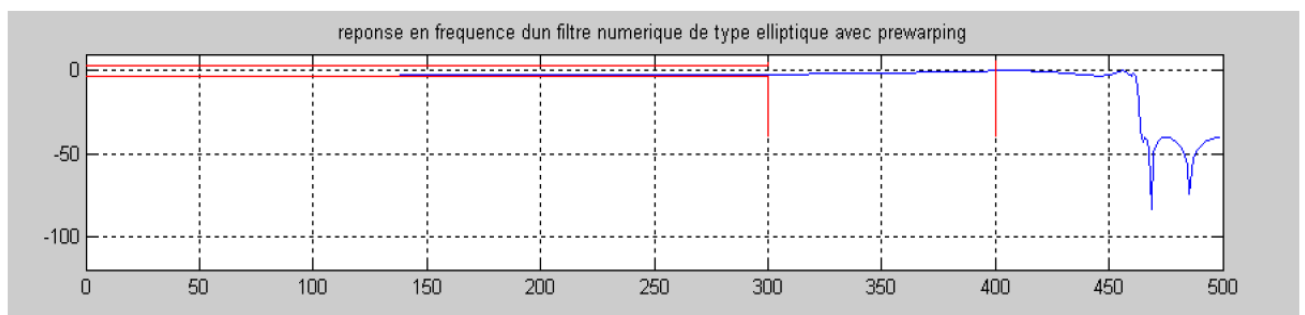
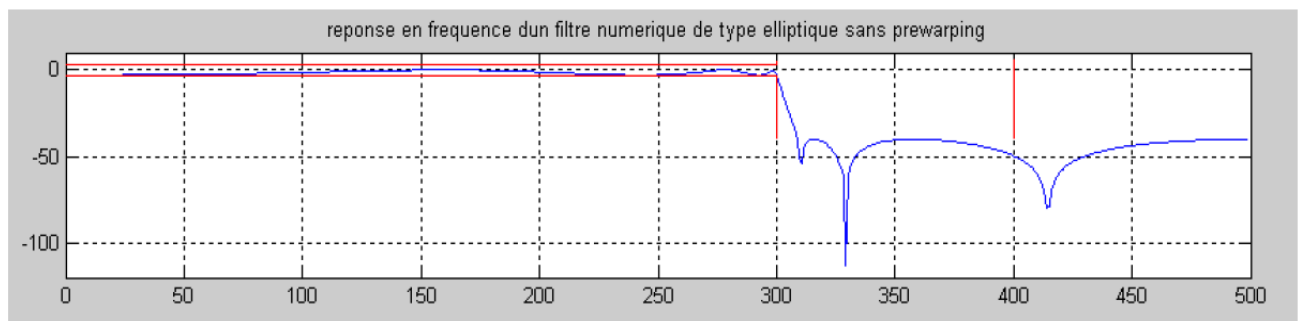
On retrouve à peu près les mêmes allures que dans le cas analogique c'est à dire que l'on note des oscillations en basse fréquence pour les filtres de Tchebychev et elliptique, oscillations en hautes pulsations pour elliptique et également un gain tendant vers l'infini pour les filtres de Butterworth et Tchebychev).

En s'intéressant à la réponse en fréquence avec le prewarping, la courbe de réponse en fréquence ne se trouve plus à l'intérieur du gabarit numérique. En effet, on impose au filtre numérique de coïncider avec le filtre analogique à $F=464\text{MHz}$ en déformant préalablement la réponse analogique et en jouant sur la compression des fréquences.

3.2.5.2 Transformation bilinéaire pour les filtres de Tchebychev



3.2.5.3 Transformation bilinéaire pour les filtres Elliptiques



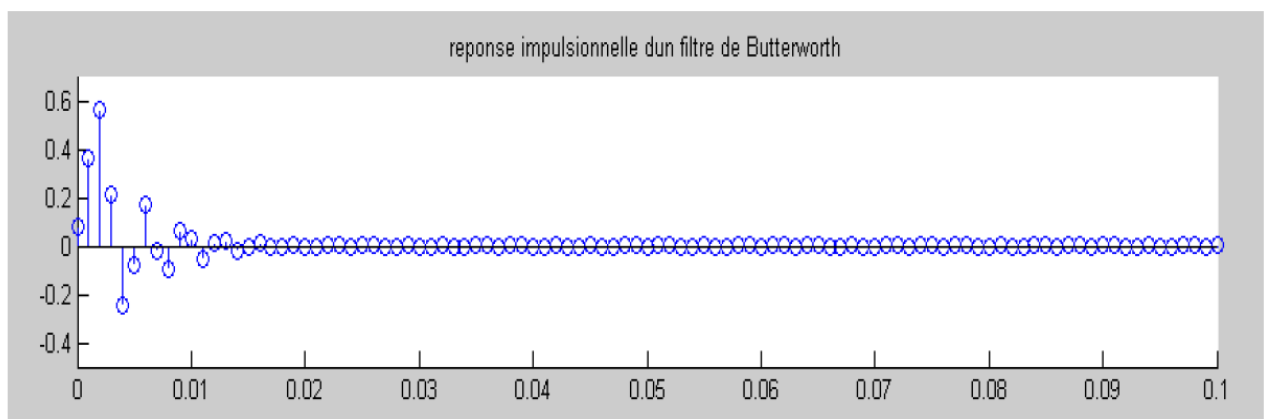
3.2.6 Tracé de la réponse impulsionnelle numérique (obtenu par transformation bilinéaire du filtre analogique)

On s'intéresse ici au tracé de la réponse impulsionnelle obtenue grâce aux fonctions Matlab IMPZ et STEM pour le tracé :

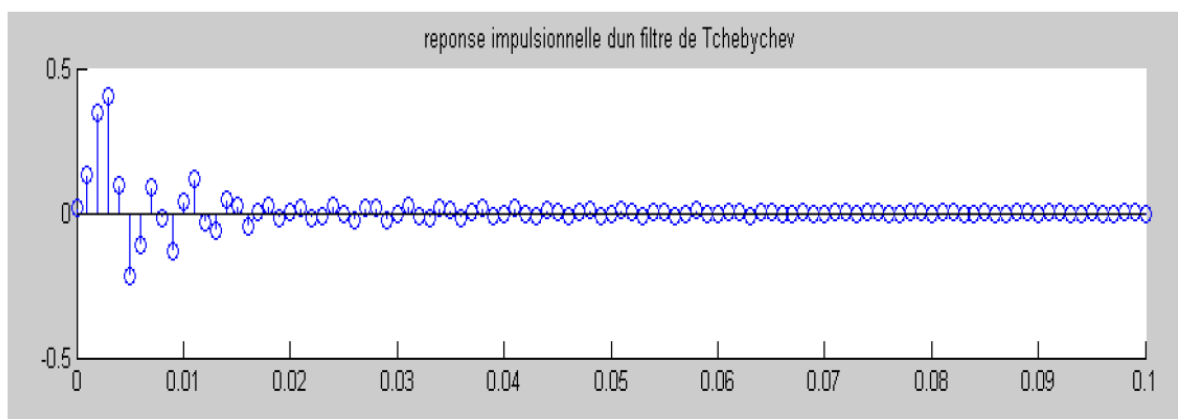
```
[ldb, Tb] = IMPZ (NUMdb, DENdb, 512, fe)  
[ldc, Tc] = IMPZ (NUMdc, DENdc, 512, fe)  
[lde, Te] = IMPZ (NUMde, DENde, 512, fe)
```

```
Stem (Tb, ldb);  
Stem (Tc, ldc);  
Stem (Te, lde);
```

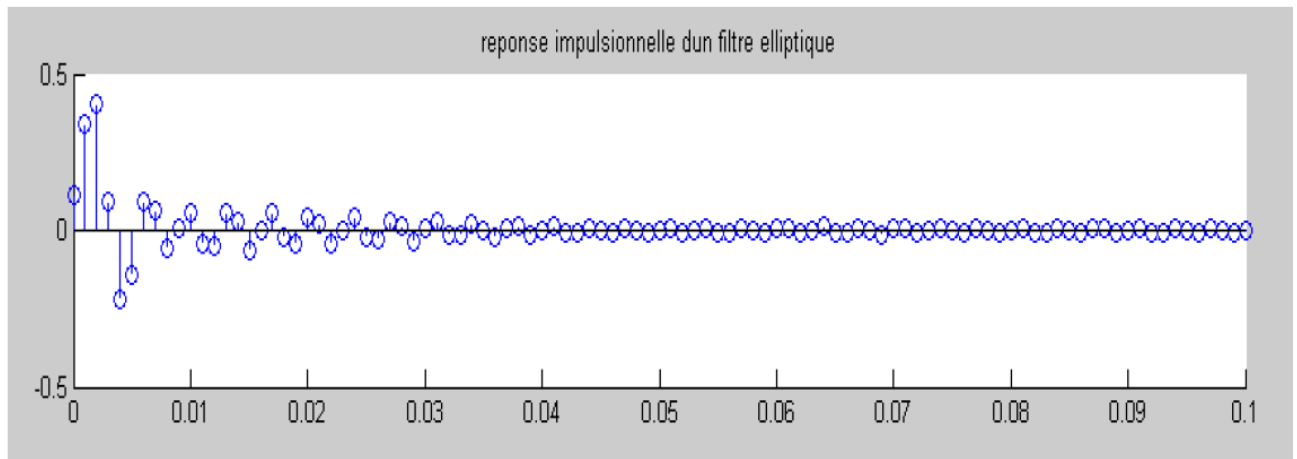
3.2.6.1 Filtre de Butterworth



3.2.6.2 Les filtres de Tchebychev



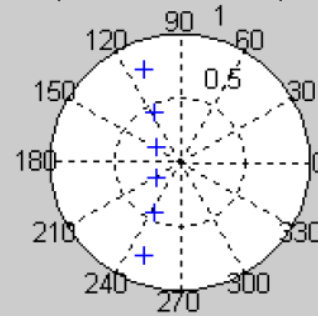
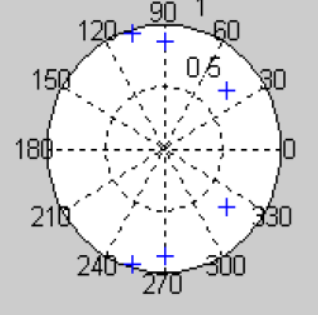
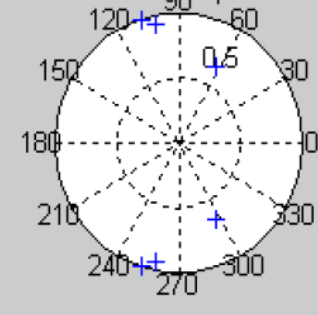
3.2.6.3 Les filtres Elliptiques



En comparant les réponses impulsionnelles des trois filtres, on s'aperçoit qu la stabilité est atteinte plus rapidement avec les filtres de Butterworth (0.025) mais en comparant avec le filtre de type elliptique (Cauer), on remarque que l'amplitude des oscillations est moins grande et que la stabilité est atteinte légèrement moins rapidement. On note donc un compromis entre amplitude des oscillations et stabilité du système.

Quant au filtre de Tchebychev, tout porte à croire qu'il est moins « performant » que les deux autres.

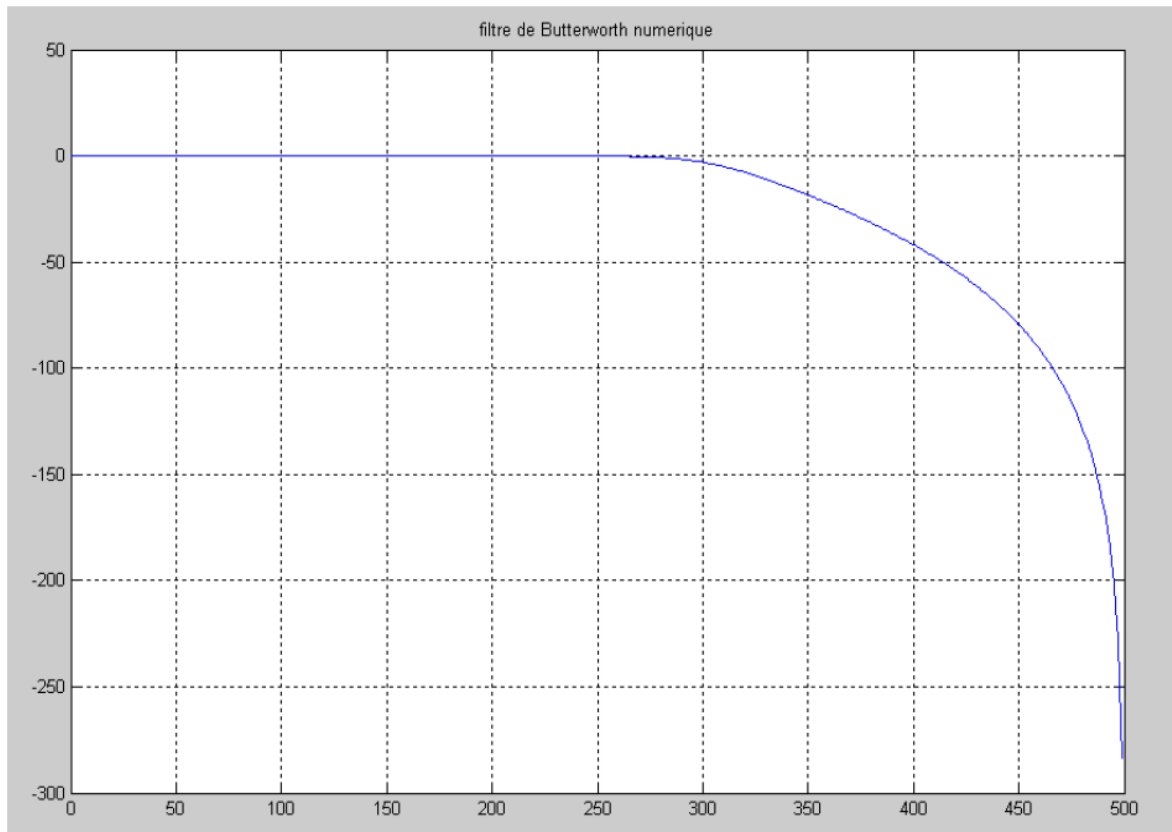
3.2.7 Visualisation des pôles d'un filtre passe bas numérique

Butterworth	poles dun filtres passe bas numerique de Butterworth  $-0.2753 + 0.7300i$ $-0.2753 - 0.7300i$ $-0.2056 + 0.3992i$ $-0.2056 - 0.3992i$ $-0.1794 + 0.1275i$ $-0.1794 - 0.1275i$
Tchebychev	poles dun filtres passe bas numerique de Tchebychev  $-0.2776 - 0.9224i$ $-0.2776 + 0.9224i$ $0.0050 - 0.8645i$ $0.0050 + 0.8645i$ $0.5328 - 0.4614i$ $0.5328 + 0.4614i$
Elliptique	poles dun filtres passe bas numerique de Cauer  $-0.3001 + 0.9422i$ $-0.3001 - 0.9422i$ $-0.1798 + 0.9111i$ $-0.1798 - 0.9111i$ $0.2976 + 0.5856i$ $0.2976 - 0.5856i$

On remarque que les pôles des trois filtres se trouvent par paires conjuguées et se situent tous à l'intérieur du cercle unité. D'autre part, seuls les pôles du filtre de Butterworth sont à partie réelles négatives.

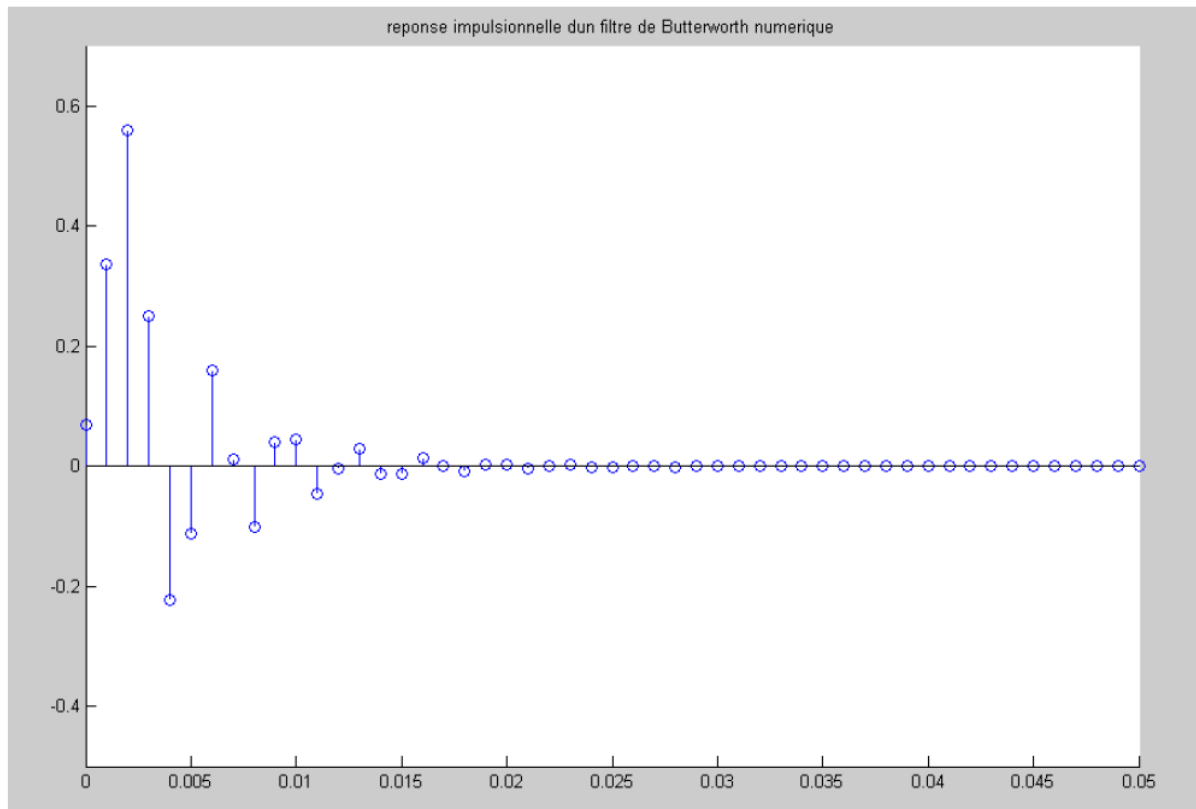
3.2.8 Spécification directe d'un filtre de Butterworth numérique

- Réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth :



Cela correspond à la même réponse que celle obtenue avec la transformation bilinéaire.

- Réponse impulsionnelle d'un filtre de Butterworth :



- Pôles d'un filtre de Butterworth numérique

