Chapitre 5 : Analyse spectrale par corrélation

Prof. M. Ramdani

Département d'Electronique
BP. 12, Sidi Amar
23000, Annaba, Algérie

Matière : Théorie du Signal
S4 Automatique
Mars 2020

Plan

Analyse spectrale

Analyse spectrale

Pourquoi la représentation fréquentielle ?

En général, l'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet pas d'interpréter correctement l'information.
Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

Analyse spectrale

Pourquoi la représentation fréquentielle ?

En général, l'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet pas d'interpréter correctement l'information.
Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

La représentation de Fourier ?

La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet d'établir une dualité entre deux représentations différentes d'un signal mais complémentaires au niveau de l'interprétation des résultats.

Exemple application : Surveillance des machines tournantes

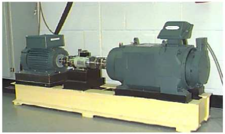


Figure: Stand experimental pour l'analyse vibratoire

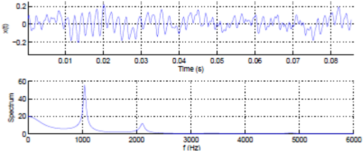


Figure: Machine sans défaut

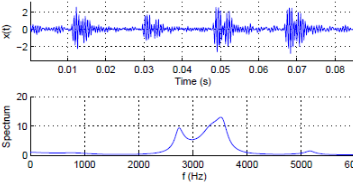


Figure: Défaut de roulement

Exemple application : Surveillance des machines tournantes

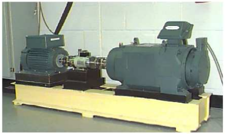


Figure: Stand experimental pour l'analyse vibratoire

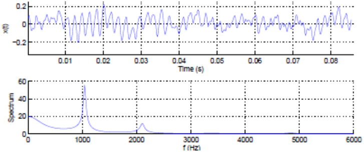


Figure: Machine sans défaut

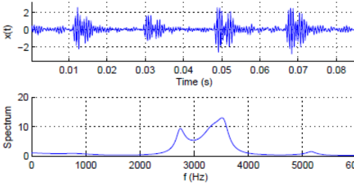
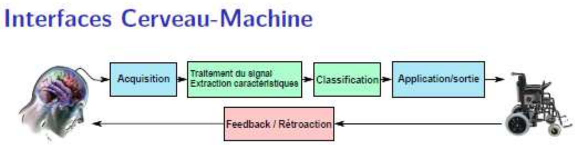
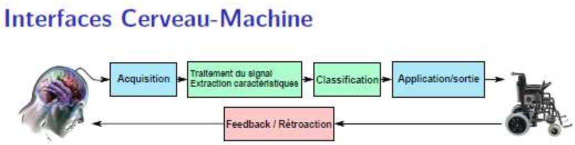


Figure: Défaut de roulement

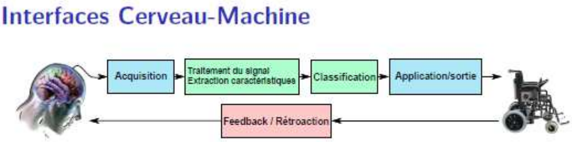
On constate qu'il y a une différence entre les spectres des deux signaux, ce qui permet de déceler la présence de défauts mécaniques par une analyse des vibrations.


Interfaces Cerveau-Machine
Acquisition
Traitement du signal
Extraction caractéristiques
Classification
Application/sortie
Feedback / Rétroaction



Objectifs

- Permettre une communication du verveau vers la machine
- Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau



Objectifs

- Permettre une communication du verveau vers la machine
- Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau

Applications

- Moyens de communication pour des patients
- Contrôle d'un engin robotisé
- Jeux vidéo, téléphone portable ...

Principe

- Extraction à partir des signaux des caractéristiques permettant de reconnaître des tâches mentales
- On estime la puissance d'un signal dans une ou plusieurs **bandes de fréquence**

Corrélation et densités spectrales

La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).

Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.

La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour les signaux réels à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Corrélation et densités spectrales

La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).

Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.

La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour les signaux réels à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Signaux à énergie finie

Autocorrélation : Corrélation entre le signal $x(t)$ et lui-même :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \tag{1}$$

Intercorrélation : corrélation entre le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt \tag{2}$$

Corrélation et densités spectrales -1-

Signaux à puissance moyenne finie

Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie, on définit **l'autocorrélation :** par la relation :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

et de même, on définit la fonction (**d'intercorrélation**) par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

Propriétés :

• $C_{xx}(\tau)$ et $C_{xy}(\tau)$ sont homogènes à une énergie (énergie croisée entre un signal et un autre retardé) ou à une puissance (deuxième définition).

• $C_{xy}(\tau) = 0$, signifie que les signaux sont totalement décorrelés (signaux orthogonaux),

• $|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(\tau)\, C_{yy}(\tau)$ **(inégalité de Schwartz)** • $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$, $\forall\, \tau$: la fonction d'autorrélation admet une valeur maximum en $\tau = 0$.

Densités spectrales

Il s’agit des transformées de Fourier des fonctions de corrélation que l’on vient de décrire, appelés aussi relation de **Wiener-Khintchine**.

Densités spectrales

Il s'agit des transformées de Fourier des fonctions de corrélation que l'on vient de décrire, appelés aussi relation de **Wiener-Khintchine**.

Densité spectrale de puissance

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\left\{C_{xx}(\tau)\right\}$$

Densité interspectrale de puissance

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\left\{C_{xy}(\tau)\right\}$$

L'identité de Parseval traduit la conservation de l'énergie lors du passage à la transformée de Fourier. On a donc :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(t)\, df$$

◇ La transformation de Fourier conserve l'énergie d'un signal.

Pour les signaux périodiques qui sont à énergie finie, on calcule dans ce cas la puissance sur une période T_0. En utilisant le développement en série de Fourier, on trouve :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) x^*(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_c|^2$$

Densité spectrale d'énergie

Compte tenu que l'énergie est conservée lors du passage à la transformée de Fourier, il est possible de définir une distribution de l'énergie par unité de fréquence, la **densité spectrale d'énergie (DSE)**

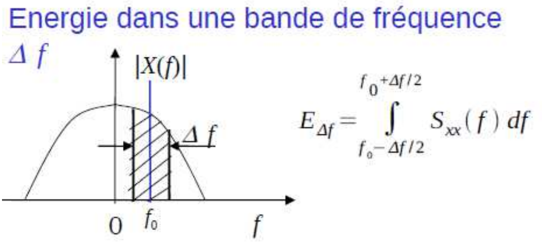


Figure: Energie dans une sous-bande fréquentielle

Energie totale :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, df$$