Université Badji Mokhtar de Annaba
Faculté des Sciences de l'ingéniorat
Département d'Electronique

Section : S4 Auto
Module : Théorie du Signal Devoir 3
Date : 2019/2020

Ex 1 : Calculer la transformée de Laplace des signaux suivants :

a) $f(t) = \begin{cases} A & t \succ 0 \\ 0 & t \prec 0 \end{cases}$

b) $f(t) = \sin(t)$

c) $f(t) = cos(t)$

d) $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac

e) $\sin(\omega t)\, u(t)$

où $u(t)$ est l'échelon unitaire.

Ex 2 : Un système physique d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = u(t)$$

avec $y(0) = 0$; (la condition initiale)

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightleftharpoons sY(s) - y(0)$$

1) Trouver le rapport $\frac{Y(s)}{U(s)}$

2) Déterminer la sortie $y(t)$ pour l'entrée

$$u(t) = \begin{cases} e^{-2t} & pour\ t \succ 0 \\ 0 & si\ \ t \prec 0 \end{cases}$$

Ex 3 : a) Trouver $H(s) = Y(s) \big/ X(s)$, la fonction de transfert du circuit suivant :

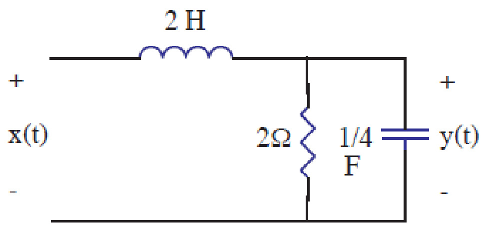
b) Est-ce que le système est stable ? **Solution :**

Ex 1 : a)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt = \int_0^\infty 1 e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

b)

$$f(t) = \sin(t)\,;\ F(s) = \int_0^\infty \sin(\omega t)\, e^{-st} dt$$



En utilisant l'intégration par parties : $\int udv = uv - \int vdu$
On pose :

$$\begin{cases} u(t) = e^{-st} \Rightarrow \ du(t) = se^{-st} \\ dv(t) = \sin(t) \Rightarrow v(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \textstyle\int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st} dt = -\cos(t)\, e^{-st}\big|_0^\infty - \int_0^\infty (-\cos(t))\,(-se^{-st})\, dt \\ &= 1 - s \textstyle\int_0^\infty \cos(t)\, e^{-st} dt \\ &= 1 - s \cdot I(s) \end{aligned}$$

$$I(s) = \textstyle\int_0^\infty \cos(t)\, e^{-st} dt; \text{ On pose} \begin{cases} dv(t) = \cos(t)\, dt; & v(t) = \sin(t) \\ u(t) = e^{-st}; & du(t) = -se^{-st} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= \sin(t)\,.e^{-st}\big|_0^\infty - \textstyle\int_0^\infty \sin(t)\,(-se^{-st})\, dt \\ &= 0 + s \textstyle\int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st} dt = s \cdot F(s) \end{aligned}$$

$$F(s) = 1 - s^2 F(s) \Rightarrow \left(1+s^2\right) F(s) = 1$$

$$F(s) = \textstyle\int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{s^2+1}$$

c)

$$F(s) = \textstyle\int_0^\infty \cos(t)\, e^{-st} dt = e^{-st} \sin(t)\big|_0^\infty - \int_0^\infty \sin(t)\,(-se^{-st} dt)$$

$$On\ pose: \begin{cases} dv(t) = \cos(t)\, dt; & v(t) = \sin(t) \\ u(t) = e^{-st}; & du(t) = -se^{-st} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= e^{-st} \sin(t)\big|_0^\infty + s \textstyle\int_0^\infty \sin(t)\, e^{-st} dt \\ &= 0 + s\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$F(s) = \textstyle\int_0^\infty \cos(t)\, e^{-st} dt = \frac{s}{s^2+1}$$

d)

$$\mathscr{L}(\delta(t)) = \int_0^\infty \delta(t)\, e^{-st} dt = 1$$

e)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\sin(\omega t)\, u(t)) &= \textstyle\int_0^\infty \sin(\omega t)\, e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2} \left(s \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Ex 2 : a) L'application de la transformée de Laplace sur l'équation différentielle donne :

$$\begin{aligned} & sY(s) - y(0) + 5Y(s) = U(s) \\ & \Rightarrow Y(s)[s+5] = U(s) \\ & \Rightarrow \ \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+5} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^\infty e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+2)} dt \\ &= \tfrac{1}{s+2} \end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+5} \Rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{s+5} = \frac{1}{(s+5)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+2} = \frac{(A+B)s + 2A + 5B}{(s+5)(s+2)}$$

Par identification terme à terme, on trouve $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+5B=0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3};\ B = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+5}\right] + B \cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{s+2}\right] \\ &= Ae^{-5t} + Be^{-2t} = -e^{-5t}/3 + e^{-2t}/3 \end{aligned}$$

Ex 3 : a) Dans le circuit on a : $R = 2\Omega$, $L = 2H$, $C = 0.25F$ Si on désigne respectivement par $i_1(t), i_2(t)$ et $i(t)$ les courants qui traversent la resistance, la capacité et l'inductance, on a :

$$\begin{aligned} & i(t) = i_1(t) + i_2(t) \\ & x(t) = L\tfrac{di(t)}{dt} + Ri_1(t) \\ & y(t) = \tfrac{1}{C}\int i_2(t)\,dt \\ & Ri_1(t) = \tfrac{1}{C}\int i_2(t)\,dt \end{aligned}$$

L'application de la transformée de Laplace donne :

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

$$X(s) = LsI(s) + RI_1(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{C}\frac{I_2(s)}{s}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= I_1(s) + I_2(s) = \tfrac{1}{RC}\tfrac{I_2(s)}{s} + I_2(s) \\ &= I_2(s)\left(1 + \tfrac{1}{RCs}\right) = I_2(s)\left(\tfrac{1+RCs}{RCs}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= LsI(s) + RI_1(s) = LsI_2(s)\left(\tfrac{1+RCs}{RCs}\right) + R\tfrac{1}{RC}\tfrac{I_2(s)}{s} \\ &= \tfrac{I_2(s)}{RCs}\left[(1+RCs)Ls + R\right] = \tfrac{Y(s)}{R}\left[(1+RCs)Ls + R\right] \end{aligned}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{(1+RCs)Ls+R}$$

$$AN: \ \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{(1+0.5s)2s+s} = \frac{2}{s^2+2s+s}$$