

Systèmes linéaires continus invariants

Prof. M. Ramdani

Département d'Electronique
BP. 12, Sidi Amar
23000, Annaba, Algérie

Matière : Théorie du Signal, S4 Automatique, Avril 2020
Chapitre 3 : Transformée de Laplace
Chapitre 4 : Produit de convolution



- 1 Transformée de Laplace
 - Propriétés de la transformée de Laplace
 - Transformées de Laplace usuelles
- 2 Application de la transformée de Laplace
- 3 Systèmes linéaires continus et invariants
 - Equation différentielle
 - Fonction de transfert
 - Réponse impulsionnelle
- 4 Produit de convolution

A l'origine de la transformée de Laplace, on trouve l'idée que, si une fonction $x(t)$ n'est pas sommable en valeur absolue, il est néanmoins intéressant de définir la transformée de Fourier du produit $x(t)e^{-\sigma t}$, du moins s'il existe un nombre réel σ tel que le produit ci-dessus soit sommable en valeur absolue et l'intégrale suivante converge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt$$

On définit alors la transformée de Laplace *bilatérale* $X(s)$ de $x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

où s est une variable complexe $s = \sigma + j\omega$

On utilise aussi $x(t) \rightleftharpoons X(s)$.

On note la transformée inverse par : $x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(s)$

Propriétés de la transformée de Laplace

Linéarité :

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \Rightarrow \alpha X(s) + \beta Y(s)$$

où α et β sont deux coefficients.

Translation dans le domaine temporel de a $\mathcal{L}\{(x(t-a))\} = e^{-as}X(s) \quad a > 0$

Translation dans le domaine de Laplace de a $\mathcal{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$

Propriétés de la transformée de Laplace -1-

Changement d'échelle :

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

dérivée :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

Intégration :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$$

Table des transformées de Laplace usuelles

Table: Transformée de Laplace

Fonction	$f(t)$	$F(s)$
impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1
échelon unitaire	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynôme	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
sinus amorti	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Nous allons maintenant utiliser la transformée de Laplace pour analyser des systèmes dynamiques tels que les circuits électriques. Considérons le circuit RLC de la figure 1. On veut trouver la réponse $v_o(t)$ $t \geq 0$ pour une entrée d'excitation $v_i(t)$ $t \geq 0$ donnée.

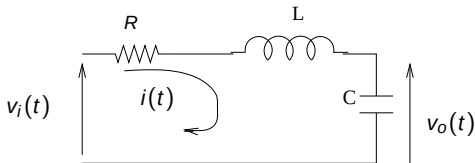


Figure: Circuit RLC

Nous avons l'équation : $v_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_o(t)$ et $v_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$

L'application de la transformée de Laplace donne :

$$V_i(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{I(s)}{Cs}$$

$$= \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) I(s) \Rightarrow I(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

En remplaçant $I(s)$ par son expression dans $V_o(s)$, on obtient :

$$V_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

$$= \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} V_i(s)$$

Pour déterminer $v_o(t)$, il faut trouver la transformée inverse

de l'expression de $V_o(s)$:

$$v_o(t) = L^{-1}\{V_o(s)\}$$

Représentations des systèmes linéaires continus

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible d'établir diverses représentations pour un système décrit par un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (invariant).

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps.

Considérons l'exemple illustratif du système électro-mécanique à base d'un moteur à courant continu (MCC) dont l'entrée est la tension $u(t)$ aux bornes de l'inducteur alors que sa sortie est représentée par la vitesse angulaire $\omega(t)$.

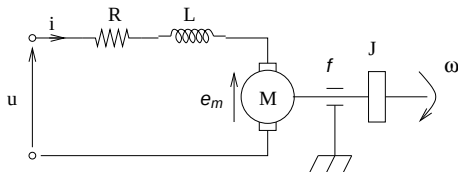


Figure: Moteur à courant continu excité par l'inducteur

Nous supposons que le MCC fonctionne en régime linéaire (couple moteur proportionnel au courant inducteur $i(t)$)

Représentations des systèmes linéaires continus

Equation électrique

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2)$$

Equation mécanique

$$\Gamma_m(t) - \Gamma_r(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}; \quad \Gamma_r(t) = f\omega(t)$$

où $\Gamma_m(t)$ est le couple moteur.

$\Gamma_r(t)$ est le couple résistant.

$$\Gamma_m(t) = f\omega(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3)$$

Equation électro-mécanique

$$\Gamma_e(t) = Ki(t) \quad (4)$$

où $\Gamma_e(t)$ est le couple électrique.

$$\Gamma_m(t) = \Gamma_e(t) \equiv \Gamma(t)$$

Représentations des systèmes linéaires continus

L'exploitation des équations électrique, mécanique et électro-mécanique permet de trouver une équation différentielle reliant la sortie $\omega(t)$ et l'entrée $u(t)$. En mettant $\Gamma_e(t) = \Gamma_m(t)$, on obtient :

$$Ki(t) = f\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} i(t) = \left(f\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt}\right) / K \\ \frac{di(t)}{dt} = \left(f\frac{d\omega(t)}{dt} + J\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right) / K \end{cases}$$

En remplaçant $i(t)$ et $\frac{di(t)}{dt}$ dans l'équation électrique 2 on a donc:

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot \left(f\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt}\right) / K + L \cdot \left(f\frac{d\omega(t)}{dt} + J\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right) / K \\ \Rightarrow Ku(t) &= Rf\omega(t) + RJ\frac{d\omega(t)}{dt} + Lf\frac{d\omega(t)}{dt} + LJ\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \\ &= Rf\omega(t) + (RJ + Lf)\frac{d\omega(t)}{dt} + LJ\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

équation différentielle

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \left(\frac{f}{J} + \frac{R}{L}\right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{Rf}{LJ}\omega(t) = \frac{K}{LJ}u(t) \quad (5)$$

L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\omega(t)}{dt} + a_0\omega(t) = b_0u(t) \quad (6)$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants, qui lie l'entrée $u(t)$ à la sortie $\omega(t)$ du système, est un modèle de celui-ci. Elle est du 2ème ordre et **l'unicité de sa solution** exige la connaissance de 2 conditions initiales à l'instant t_0

$$\omega(t_0) = \omega_0; \quad \frac{d\omega(t_0)}{dt} = \dot{\omega}_0 \quad (7)$$

Cela signifie que si l'on connaît $u(t)$, $t \geq t_0$, on peut calculer $\omega(t)$, $t \geq t_0$ qui est la solution unique de l'équation (6) avec les conditions initiales (7).

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t); \quad m \leq n \quad (8)$$

où $y(t)$ et $u(t)$ représentent respectivement la sortie et l'entrée. Pour obtenir une solution unique, il faut n conditions initiales.

En appliquant la TL aux équations (2) à (4) ou à l'équation (6), on obtient :

$$\begin{aligned}U(s) &= RI(s) + Ls(I(s) - i_0) \\ \Gamma_m(s) &= f\omega(s) + J(s\omega(s) - \omega_0) \\ \Gamma_e(s) &= KI(s) \\ \Gamma_e(s) &= \Gamma_m(s) \equiv \Gamma(s)\end{aligned}\tag{9}$$

avec $i_0 = i(0)$ et $\omega_0 = \omega(0)$

l'instant initial t_0 est supposé nul et $u(t) = 0 \forall t < 0$. Si $i_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$, on peut déduire la fonction de transfert du système, sous forme d'un rapport entre les transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée.

fonction de transfert

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{(R + Ls)(f + Js)}\tag{10}$$

Cette fonction est caractérisée par ses deux **pôles (racines du dénominateur)** :

$$s_1 = -\frac{R}{L}, s_2 = -\frac{f}{J}$$

A partir de (6) on obtiendrait, en supposant nulles les deux conditions initiales (7)

La FT est un modèle du système considéré, modèle qui permet de calculer $\omega(s)$ et donc $\omega(t)$ si l'on connaît l'entrée $U(s)$ (ou $u(t)$) à partir de l'instant initial $t = 0$ (et si $u(t) = 0, t < 0$), uniquement si les conditions initiales sont nulles (CI=0).

En général,

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (12)$$

Elle est d'ordre n possédant n pôles et m zéros (racines du numérateur).

De l'exemple précédent, on a :

$$\omega(s) = G(s)U(s)$$

soit

$$\omega(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (13)$$

si on suppose que les fonctions temporelles sont nulles pour $t < 0$.

ou encore

$$\omega(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (14)$$

$g(t)$ représente la transformée inverse de $G(s)$. Elle est également la réponse $\omega(y)$ à une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$ (puisque $U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$).

De l'exemple précédent, on a :

$$\omega(s) = G(s)U(s)$$

ou en utilisant le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système avec l'entrée $u(t)$:

$$\omega(t) = g(t) * u(t) \quad (15)$$

soit

$$\omega(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \quad (16)$$

si on suppose que les fonctions temporelles sont nulles pour $t < 0$.

ou encore

$$\omega(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (17)$$