I. Signaux Discrets

1. Introduction

Le signal physique délivré par un capteur est, en général, continu en amplitude et en temps. Par contre, un signal numérique n'est qu'une suite de valeurs ou nombres codés en binaire à l'aide de bits 0/1 (0 V et 5 V). Le passage du signal analogique au signal numérique nécessite deux opérations :

- **Echantillonnage** : discrétisation du temps
- **Quantification ou numérisation** : discrétisation de l'amplitude

Propriétés du numérique, c.-à-d. du codage en 0 et 1.

- La numérisation d'un signal est une perte d'information…
- Permet d'effectuer les traitements sur des machines informatiques spécialisés ou non dans le traitement du signal (DSP, PC…).
  - Puissance, rapidité, cout
  - Flexibilité (système numérique = logiciel ou algorithme facile à modifier ; contrairement aux montages électroniques, ex. modems…)
  - Robustesse au bruit : le codage des 0 et 1, souvent représentés par des tensions 0 et 5 Volts, n'est pas altéré par la variation du signal : 0 V qui change en 0.5 V reste toujours '0' logique, de même une tension de 5 V qui change en 4.5 V représente toujours un '1' logique. exemple: un '0' codé sur 0 V parasité par un bruit de 0.5 V sera toujours un '0' logique.
  - Précision : insensibilité au temps, à la température, à l'usure du système.
  - Pas d'erreur lors de la transmission, la recopie, le stockage, etc…

  Applications
- Large diffusion des techniques de TNS (ou DSP en anglais)
- Applications dans différents secteurs :

Télécommunications :

- TV numérique
- Enregistrement audio, vidéo
- Téléphonie mobile

Domaine :

- Automobile
- Spatiale
- Militaire
- Industriel

Prédominance du numérique depuis l'avènement du microprocesseur.

NB. : On ne peut pas dire que le numérique est toujours supérieur à l'analogique. Au fait, cela dépend de la qualité de l'échantillonnage et de la quantification des signaux.

2. Echantillonnage d'un Signal

- **Définition**

Échantillonner un signal consiste à le prélever à intervalle de temps réguliers, pendant une durée très courte.

Considérons un signal continu $x(t)$, sa discrétisation ne pose aucun problème en elle-même. Supposons que nous nous n'intéressons au signal qu'à des instants discrets équidistants $t = n\Delta t = nT$ (où $T = \Delta t$) est appelé pas d'échantillonnage, c'est l'intervalle de temps qui sépare deux valeurs consécutives du signal discret.

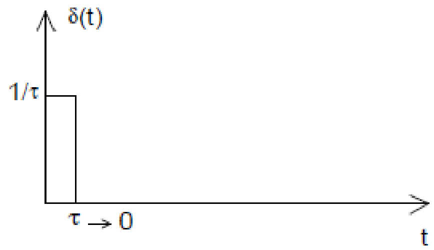
$$Au\ signal\ continu\ x(t) on\ fait\ correspondre\ le\ signal\ discret$$

$$\{x(n)\} = \{\dots, x_n, ..\}\ avec\ x_n = x(nT).$$

Bien entendu, le passage inverse du signal discret au signal continu ne peut se faire avec certitude, le signal $x(t)$ pouvant prendre n'importe quelle valeur entre deux instants d'échantillonnage. Il est évident que si la période d'échantillonnage est relativement faible, une grande partie de l'information contenue dans le signal d'entrée peut être perdue définitivement à la sortie de l'échantillonneur. Pour pouvoir reconstituer le signal d'origine à partir du signal échantillonné, on peut montrer qu'il existe une relation bien définie entre la fréquence minimale d'échantillonnage approprié et la plus haute fréquence contenue dans le signal d'entrée permettant de sauvegarder toute l'information contenue dans ce signal.

2.2 Peigne de Dirac

Un Dirac peut être assimilé à une impulsion de durée τ →0 et d'amplitude $1/\tau$.



Un peigne de Dirac, noté $p(t)$, est constitué d'une suite d'impulsions de Dirac espacées de T_e, période d'échantillonnage.

Le peigne de Dirac a pour expression :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\ ;\ T_e\ période\ d'échantillonnage$$

et le signal échantillonné :

$$x^*(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

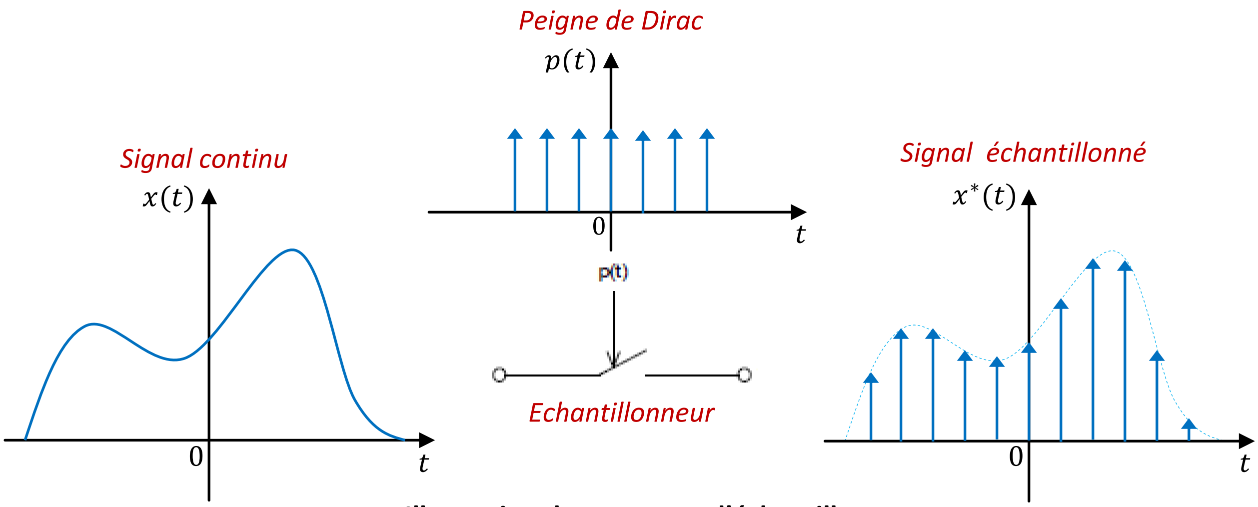


Illustration du processus d'échantillonnage

$$\boldsymbol{x^*(t) = x(t) \times p(t)}$$

Le signal échantillonné $x^*(t)$ se rapproche d'autant plus du signal analogique que la fréquence d'échantillonnage est élevée. L'échantillonnage du signal $x(t)$ correspond à son produit par le peigne de Dirac.

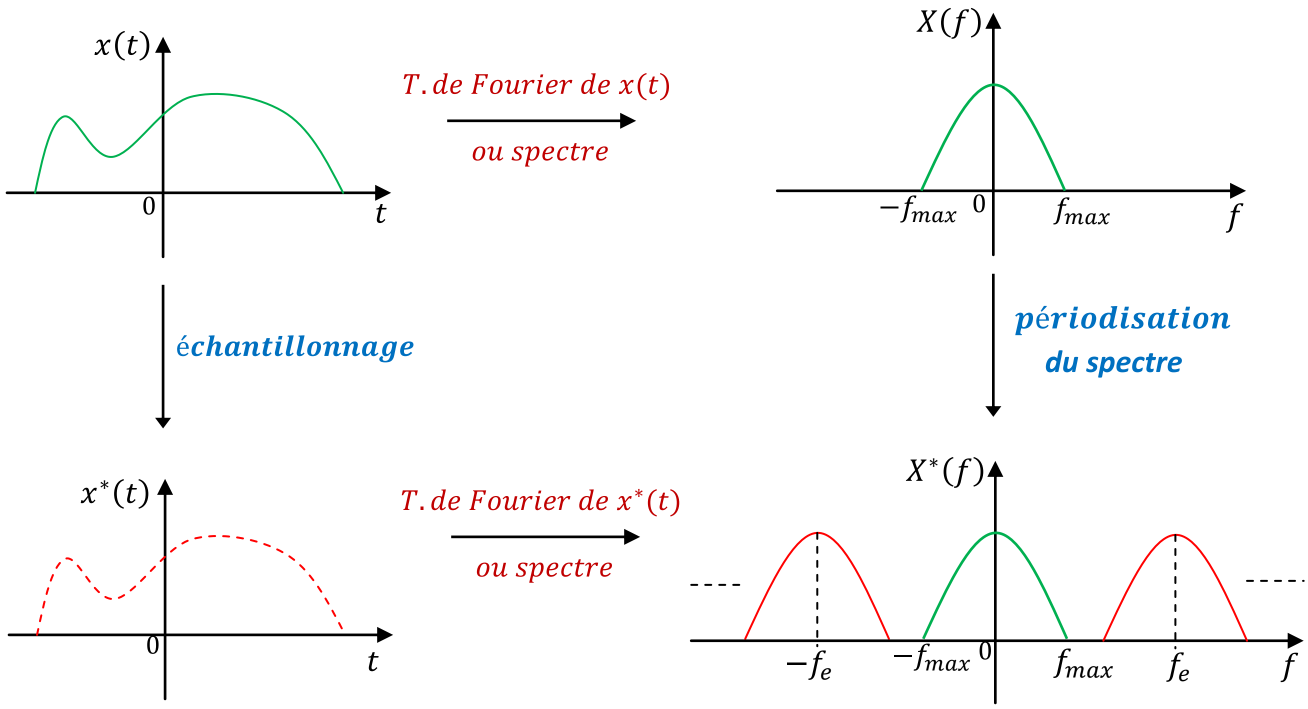
2.3 Théorème de Shannon

On montre que le spectre du signal échantillonné $x^*(t)$ est équivalent à une répètition périodique du spectre du signal initial continu (t) . Le spectre idéal du signal $x^*(t)$ est périodique et de période égale à la fréquence d'échantillonnage f_e:

$$x(t) \xrightarrow{TF \;\; spectre} X(f)$$

$$\downarrow$$

$$x^*(t) \xrightarrow{TF \;\; spectre\ après\ échant.} X^*(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) \;, f_e = \frac{1}{T_e}$$



On peut remarquer sur le spectre ci-dessus que la fréquence d'échantillonnage doit être telle que $f_e - f_{max} > f_{max}$, soit $f_e > 2.f_{max}$, sinon il y a recouvrement des spectres, ceci constituant le théorème de Shannon.

La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné.

$$f_e > 2.f_{max}$$

On peut alors reconstituer le signal initial à l'aide d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à la fréquence maximale de son spectre. Il est bien évident que la condition de Shannon est insuffisante, le filtre devant être parfait pour supprimer la fréquence $f_e - f_{max}$.

En pratique on choisit des fréquences d'échantillonnage :

$$5f_{max} < f_e < 25f_{max}$$

3. Introduction aux signaux discrets

En traitement du signal, le signal à temps discret correspond en général aux valeurs d'un signal à temps continu mesuré aux seuls instants nT multiples d'une période T d'échantillonnage :

$$x(t) \xrightarrow{\text{échantillonnage},\ T} x(nT).$$

D'un point de vue formel, un signal à temps discret peut donc être représenté par une suite ordonnée de nombres réels ou complexes notés :

$$x_n \text{ ou } x(n) \text{ ou } x(nT), \qquad n \in Z, \qquad x(n) \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Le signal $x(n)$ est par définition une séquence de valeurs x_n. $x(n)$ n'est pas *défini* pour des valeurs de *n* non entières. On appelle *x*(*n*) le nième *échantillon* de ce signal.

Remarques

– On s'intéressera principalement aux suites causales réelles :

$$x(n) = 0;\ \forall n < 0$$

– Un signal numérique est un signal à temps discret quantifié en amplitude, c'est à dire prenant uniquement un certain nombre fini de valeurs codées en mots binaire.

Soit un signal x(t) échantillonné à la période T_e, le signal échantillonné s'écrit :

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\ \delta(t - nT_e)$$

En considérant une période d'échantillonnage normalisée $T_e = 1$, on a :

$$x_e(t) = \sum_n x(n)\ \delta(t - n)$$

On obtient la suite de valeurs ou séquence $\{x(n)\}$ appelée signal discret. Ainsi, un signal discret est une suite de nombres $\{x(n)\}$ représentée par la fonction $x(n)$définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs :

$$n \longmapsto x(n)\ :\ \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Remarque : la normalisation permet de considérer la suite de valeurs $x(nT_e)$independamment du processus de discretisation qui l'a générée.

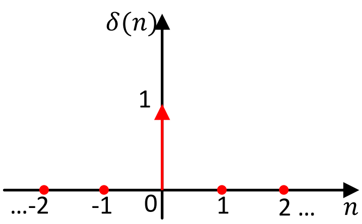
Quelques signaux élémentaires sont utiles pour l'étude des propriétés des systèmes de traitement du signal.

3.1 Exemples de signaux discrets usuels

- **Impulsion unité ou fonction delta de Kronecker (ou Dirac discret)**

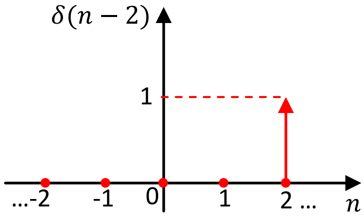
Il s'agit d'un signal noté $\delta(n)$, tel que :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & si\ \ n = 0 \\ 0 & si\ \ n \neq 0 \end{cases}$$



La même impulsion retardée de k échantillons , notée $\delta(n-k)$, est donnée par:

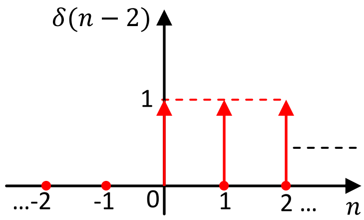
$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & si\ \ n = k \\ 0 & si\ \ n \neq k \end{cases}$$



- **Signal échelon unité**

Il s'agit d'un signal noté $u(n)$, tel que :

$$u(n) = \begin{cases} 1 & si\ \ n \geq 0 \\ 0 & si\ \ n < 0 \end{cases}$$



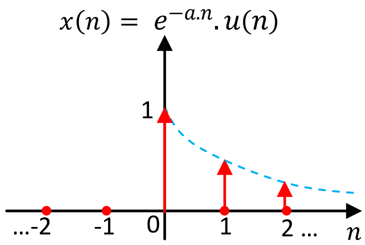
On peut écrire aussi :

$$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)$$

- **Signal exponential causal**

Il s'agit du signal $x(n)$ défini par :

$$x(n) = e^{-a.n}.u(n) = \begin{cases} e^{-a.n} & si\ \ n \geq 0 \\ 0 & si\ \ n < 0 \end{cases}$$



- **Signal puissance causal**

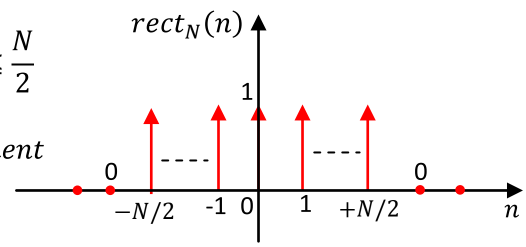
Il s'agit du signal $x(n)$ défini par :

$$x(n) = a^n.u(n) = \begin{cases} a^n & si\ \ n \geq 0 \\ 0 & si\ \ n < 0 \end{cases}$$

- **Signal rectangulaire centré de durée N paire ou porte**

Ce signal, noté $rect_N(n)$, est défini par :

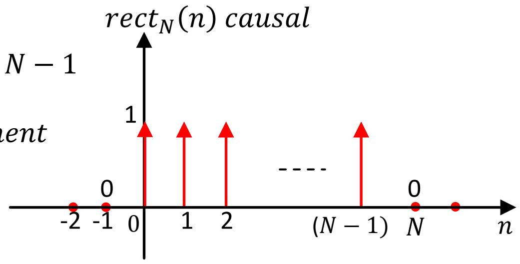
$$x(n) = rect_N(n) = \begin{cases} 1 & si\ \ |n| \leq \dfrac{N}{2} \\ 0 & autrement \end{cases}$$



- **Signal rectangulaire causal de durée N ou porte causale**

Ce signal, noté $rect_N(n)$, est défini par :

$$x(n) = rect_N(n) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$



3.2 Définition de la périodicité

Un signal discret est périodique de période N si on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ tel\ que\ x(n+N) = x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Note : la plus petite valeur de N est la période fondamentale.

Exemples :

- signal sinusoidal : $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$
- signal exponentiel complexe : $x(n) = a\, e^{j\omega_0 n}$

En discret, les signaux sinusoidaux discrétisés ne sont pas nécessairement périodiques.

- **Condition de périodicité : $\boldsymbol{\omega_0 n = 2\pi k}$**

Soit $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$après discrétisation on obtient le signal :

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$$

$$x(n) est\ périodique\ si\ \omega_0 n = 2\pi k\ avec\ n \in \mathbb{N}\ et\ k \in \mathbb{Z}$$

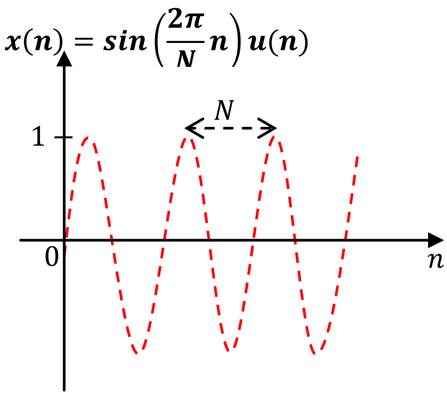
$$soit\ \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{n}{k}\quad avec\ \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$$

La période est l'entier naturel N s'il existe tel que :

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} \in \mathbb{N}$$

Remarque : en continu, la condition de périodicité est moins restrictive et s'énonce :

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{n}{k} \quad avec \ \frac{n}{k} \in \mathbb{R}$$



- **Signal sinusoidal causal de période N**

Il s'agit du signal donné par : $x(n) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)u(n)$

La période est égale à *N*, en effet on a :

$$x(n+N) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{N}(n+N)\right) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{N}n + 2\pi\right) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = x(n)$$

3.3 Propriétés des Signaux à temps discret

- **Causalité**

Un signal $x(n)$est dit causal lorsqu'il vérifie la condition :

$$\boldsymbol{x(n) = 0 \quad pour\ tout\ n < 0}$$

- **Energie et puissance des signaux discrets**

Les notions d'énergie et puissance des signaux discrets sont par les relations suivantes :

- **Energie totale d'un signal discret**

On définit l'énergie totale d'un signal discret par :

$$E_\infty\{x(n)\} \triangleq E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

- **Puissance instantanée d'un signal discret**

La puissance instantanée d'un signal $x(n)$ est définie par :

$$P(n) = |x(n)|^2$$

- **Puissance moyenne**

Si le signal est à énergie infinie, on définit alors la puissance moyenne de la séquence discrète par :

$$P \triangleq \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

Exemple : signal échelon discret

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^2 = +\infty$$

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{+N} 1$$

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

- **Puissance moyenne d'un signal périodique**

Si N est la période du signal alors on définit la puissance moyenne sur une période par :

$$P = \lim_{K \to +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{+K} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{+N/2} |x(n)|^2$$

L'énergie sur une période est donnée par :

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

- **Parité des signaux discrets**

Un signal x(n) est symétrique ou pair si et seulement si on a :

$$x(-n) = x(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

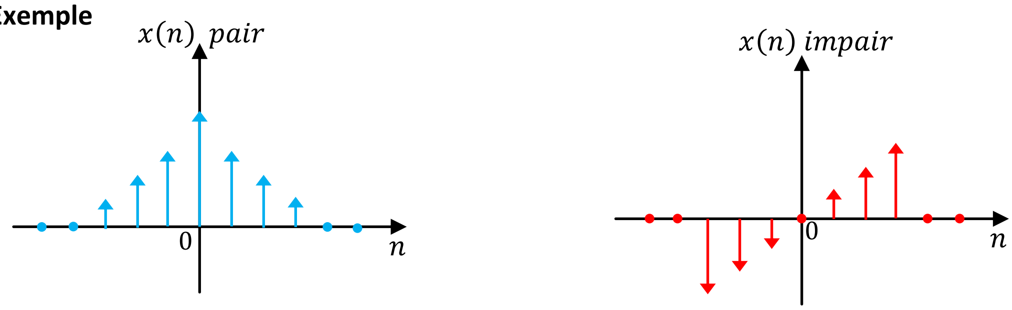
Un signal x(n) est antisymétrique ou impair si et seulement si on a :

$$x(-n) = -x(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad avec\ x(0) = 0$$

Tout signal discret $x(n)$ quelconque peut se décomposer comme la somme d'un signal pair $x_{pair}(n)$ et un signal impair $x_{impair}(n)$:

$$x(n) = x_{pair}(n) + x_{impair}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple



3.4 Opérations sur les signaux discrets

Soit $\{x(n)\} = \{x(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y(n)\} = \{y(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$ deux séquences de signaux discrets, alors on peut effectuer toutes les opérations usuelles suivantes :

- **multiplication par un scalaire** (constante) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha\{x(n)\} = \{\alpha x(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple :

$$\alpha = 3 \ et \ \{x(n)\} = \{\ldots 0, 1, 2, -1, 0.5, 0 \ldots\}$$

$$3\{x(n)\} = \{\ldots 0, 3, 6, -3, 1.5, 0, \ldots\}$$

- **somme des signaux discrets**

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple :

$$\{x(n)\} = \{\ldots, 0, 1, 2, -1, 0.5, 0, \ldots\}$$

$$\{y(n)\} = \{\ldots, 0, 0.8, 1, 1, 0.5, 0, \ldots\}$$

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{\ldots, 0, 1.8, 3, 0, 1, 0, \ldots\}$$

- **multiplication des signaux discrets**

$$\{x(n)\}\{y(n)\} = \{x(n)y(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple :

$$\{x(n)\}\{y(n)\} = \{\ldots, 0, 0.8, 2, -1, 0.25, 0, \ldots\}$$

- **somme de convolution des signaux discrets**

La convolution entre deux signaux discrets est définie par la somme suivante :

$$\{z(n)\} = \{x(n)\} \star \{y(n)\} \triangleq \left\{z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k) \quad k,n \in \mathbb{Z}\right\}$$

- **Intercorrélation des signaux discrets**

L'intercorrélation entre deux signaux discrets $x(n)$ et $y(n)$ est définie par

$$R_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = R_{yx}(-k) \quad k,n \in \mathbb{Z}$$

- **Autocorrélation d'un signal discret**

L'autocorrélation d'un signal discret x(n) est donnée par l'expression suivante :

$$R_{xx}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k) = R_{xx}(-k) \quad k,n \in \mathbb{Z}$$

Propriétés de l'autocorrélation :

. Si x(n) est réel alors $R_{xx}(k)$ est réelle paire ($R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$)

. $R_{xx}(0) = E(\infty)$: énergie totale du signal

. $|R_{xx}(k)| \leq R_{xx}(0) = E(\infty) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

On note que $R_{xy}(k) = x(k) * y(-k)$

Ces opérations sur les signaux discrets produisent des signaux discrets

3.5 Signaux définis par une relation de récurrence

Aux équations différentielles régissant les systèmes continus correspondent les équations aux différences finies, appelées aussi équations de récurrence, permettant de décrire les signaux et les systèmes dans le cas discret.

L'expression générale d'une équation récurrente d'ordre N ou aux différences reliant l'entrée x(n) d'un système discret à sa sortie y(n) est la suivante :

$$y(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j)$$

$$avec\ N \geq M, pour\ assurer\ la\ causalité\ du\ système$$

Exemple : considérons l'équation récurrente autonome, (c.-à-d. sans excitation, $x(n) = 0$) suivante représentant le signal $x(n)$ en fonction d'une partie de sa valeur à l'instant précédent $x(n-1)$:

$$\boldsymbol{x(n) = a\,x(n-1)} \quad \boldsymbol{avec\; x(0) = C} \;\; (condition\ initiale)\ et\ a\ un\ scalaire$$

On montre aisément que la solution à cette équation récurrente est donnée par le signal discret:

$$\boldsymbol{x(n) = C\,a^{n}\,.\,u(n)}$$

II. La transformée en $\mathcal{Z}$

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas des transformées de Fourier ou de Laplace pour les systèmes à temps continu. Ces transformations connaissent une extension aux systèmes à temps discret. La transformée en z est aux systèmes à temps discret ce que la transformée de Laplace est aux systèmes à temps continu. La propriété la plus remarquable est toujours la mise en correspondance de la convolution dans le domaine direct avec un produit dans le domaine de la transformée. La transformée en z présente en outre l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier.
Les raisons d'introduire la transformée en z sont donc les mêmes que celles qui ont motivé l'utilisation de la transformée de Laplace : une facilité plus grande d'utilisation et d'inversion permettant l'étude et l'analyse des systèmes linéaires invariants discrets ainsi que la résolution des équations aux différences qui régissent ces systèmes.

II.1 Transformée en $\mathcal{Z}$ des signaux discrets

On peut obtenir l'expression de la transformée de Laplace pour un signal échantillonné conduisant vers la définition de la notion de transformée en $\mathcal{Z}$ en introduisant une nouvelle variable complexe que l'on nomme z.

- **Définition de la transformée en $\mathcal{Z}$**

Soit $x_e(t)$ un signal échantillonné que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e) \quad , \quad T_e \ \textit{période d'échantillonnage}$$

Cherchons sa transformée de Laplace en utilisant le théorème de décalage et sachant que la $TL\{\delta(t)\} = 1$:

$$T\mathcal{L}\left[x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,\delta(t - nT_e)\right] = X^*(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\,T\mathcal{L}[\delta(t - nT_e)]$$

et d'après le théorème du retard on sait que :

$$TL\{\delta(t - nT_e\} = e^{-nT_e p}$$

alors on obtient la transformée de Laplace échantillonnée $X^*(p)$:

$$X^*(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\, e^{-nT_e p}$$

En posant : $\boldsymbol{z = e^{T_e p}}$

$$\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\, z^{-n}} \quad \textbf{où } \boldsymbol{z \in \mathbb{C}}$$

Si on prend $T_e = 1$ (normalisée) alors on définit la transformée en $\mathcal{Z}$ bilatérale d'un signal discret $\{x(n)\}$ par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} \mathcal{Z}[x(n)] = \underbrace{\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}}}_{\boldsymbol{Transformée\ en\ Z\ bilatérale}}$$

Si x(n) est un signal causal on définit alors la transformée en Z unilatérale de x(n) donné par :

$$\{x(n)\} \xrightarrow{TZ} \mathcal{Z}[x(n)] = \underbrace{\boldsymbol{X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}}}_{\boldsymbol{Transformée\ en\ Z\ unilatérale}}$$

La variable complexe z joue le même rôle pour les signaux et systèmes discrets que celui joué par la variable complexe p de Laplace pour l'analyse et la représentation des signaux et systèmes continus.

Exemples

- **calcul de la TZ du signal echelon discret**

$$x(n) = u(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

- **Calcul de la T.Z du signal exponentiel décroissant**

$$x(n) = e^{-a.nT}.u(n) \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} e^{-a.nT}\, \boldsymbol{z^{-n}} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} (\boldsymbol{e^{aT}z})^{-\boldsymbol{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\boldsymbol{e^{aT}z}}\right)^{n}$$

$$série\ géométrique\ de\ raison\ r = \frac{1}{\boldsymbol{e^{aT}z}} = (\boldsymbol{e^{aT}z})^{-\boldsymbol{1}}$$

On sait que la somme finie d'une série géométrique est donnée par :

$$\boldsymbol{S(N)} = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{r^n} = \frac{\boldsymbol{1 - r^{N+1}}}{\boldsymbol{1 - r}}$$

$$\boldsymbol{si}\ |\boldsymbol{r}| < 1 \quad alors\ la\ somme\ de\ la\ série\ infinie\ converge\ vers:$$

$$\boldsymbol{S}(\infty) = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} \boldsymbol{r^n} = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{\boldsymbol{1 - r^{N+1}}}{\boldsymbol{1 - r}}\right) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1 - r}}$$

$$\boldsymbol{car}\ \lim_{N\to+\infty} \boldsymbol{r^{N+1}} = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{pour}\ |\boldsymbol{r}| < 1$$

D'où on déduit :

$$X(z) = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} e^{-a.nT}\, \boldsymbol{z^{-n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\boldsymbol{e^{aT}z}}\right)^{n} = \frac{1}{1 - (\boldsymbol{e^{aT}z})^{-\boldsymbol{1}}} \quad , \qquad \left|(\boldsymbol{e^{aT}z})^{-\boldsymbol{1}}\right| < 1$$

$$ou\ \ |z| > e^{-aT}:\ rayon\ de\ convergence\ de\ X(z)$$

II. 2 Propriétés de la T.Z

➢ Linéarité

La T.Z est une opération linéaire :

$$T.Z[a\, x(n) +\ b\, y(n)] = T.Z[a\, x(n)] +\ T.Z[b\, y(n)]$$

$$= a\, T.Z[\, x(n)] + b\, T.Z[y(n)] = a\, X(z) +\ b\, Y(z)$$

➢ Translation temporelle

- **Signal retardé**

$$si\ \ x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)\ alors\ x(n-1) \xrightarrow{TZ} z^{-1}X(z)\ ,\ \ retard\ d'une\ période$$

$$et\quad x(n-N) \xrightarrow{TZ} z^{-N}X(z) \quad retard\ de\ N\ périodes$$

- **Signal en avance**

$$si\ \ x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)\ alors\ x(n+1) \xrightarrow{TZ} zX(z) - z\,x(0),\ \ avance\ d'une\ période$$

$$et\ \ x(n+2) \xrightarrow{TZ} z^2X(z) - z^2\,x(0) - z\,x(1)\ \ \ avance\ de\ 2\ périodes$$

Dérivation dans le domaine Z

$$si\ x(nT) \xrightarrow{TZ} X(z)\ \ alors\ \ tx(t) \longrightarrow nTx(nT) \xrightarrow{TZ} -Tz\frac{d}{dz}X(z)$$

$$si\ \ T = 1\ \ on\ a\ n\ x(n) \xrightarrow{TZ} -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Multiplication par une exponentielle

$$e^{-at}x(t) \xrightarrow{echantillonnage,T} e^{-anT}\ x(nT) \xrightarrow{TZ} X(ze^{aT})$$

$$et$$

$$a^t x(t) \xrightarrow{echantillonnage,T=1} a^n\ x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z\longrightarrow +\infty} X(z)\ \ si\ la\ limite\ existe$$

Théorème de la valeur finale

$$x(\infty) = \lim_{z\longrightarrow 1}(1 - z^{-1})\,X(z)$$

$$et$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) = X(1)$$

Théorème de la convolution

$$x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\ y(nT-kT) \xrightarrow{TZ} X(z)\,Y(z)$$

La somme de convolution entre $x(n)$ et $y(n)$ devient un produit simple entre leurs transformées $X(z)$ et $Y(z)$ respectives dans le domaine z, et vice-versa.

II. Transformée en Z inverse

La $T.Z$ joue le même rôle pour les systèmes discrets que celui adopté par la $T.de\ Laplace$ dans le domaine continu. Pour être utile, la $T.Z$ doit avoir des méthodes d'inversion faciles, ce qui est le cas justement et on note la $T.Z$ inverse par $\mathcal{Z}^{-1}$.

Différentes méthodes sont utilisées pour trouver la séquence $\{x(n)\}$ à partir de sa transformée $X(z)$ par inversion de l'opération.

- **Méthode 1 : Développement directe de $X(z)$**

Dans cette méthode il s'agit de déterminer directement la séquence de termes x(n) en effectuant le développement par des divisions successives de $X(z)$:

Exemple

$$X(z) = (1 - az^{-1})^3 = 1 - 3az^{-1} + 3a^2z^{-2} - a^3z^{-3} \xrightarrow{TZ^{-1}} \{x(n)\}$$

$$avec\ x(0) = 1,\ \ x(1) = -3a, x(2) = 3a^2, x(3) = -a^3\ , et\ x(n) = 0\ \forall n \geq 4$$

$$X(z) = (1 - az^{-1})^{-1} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots + a^nz^{-n} + \cdots = \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} \boldsymbol{a^n\, z^{-n}}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} \{x(n)\} = \{1, a, a^2, a^3, \dots a^n, \dots\}$$
$$= \{a^n, n = 0,1,2, \dots.\}$$

$$X(z) = (1 - az^{-1})^{-1} \xRightarrow{TZ^{-1}} x(n) = a^n\ , n = 0,1,2,3, \dots$$

$$X(z) = (1 - az^{-1})^{-2} = 1 + 2az^{-1} + 3a^2z^{-2} + 4a^3z^{-3} + \cdots + (n+1)a^nz^{-n} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n\, z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} \{x(n)\} = \{(n+1)a^n, n = 0,1,2, \dots.\}$$

$$X(z) = (1 - az^{-1})^{-2} \xRightarrow{TZ^{-1}} x(n) = (n+1)a^n\ \ , \mathrm{n} = 0,1,2,3, \dots$$

- **Méthode 2 : Décomposition en somme de fractions simples**

Lorsque X(z) est écrite sous forme d'un rapport rationnel de deux polynômes en z alors il est possible de décomposer X(z) en somme de fractions simples dont la T.Z inverse est connue en utilisant par exemple une table de transformées :

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z^1 + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z^1 + a_n} \quad , avec \;\; n \geq m$$

$$\downarrow$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z^1 + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n)} \quad , \qquad p_i : \; pôles \; de \; X(z) \;\; i = 1, \ldots n$$

$$\downarrow$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(z - p_i)} = \frac{C_1}{(z - p_1)} + \frac{C_2}{(z - p_2)} + \cdots + \frac{C_n}{(z - p_n)}$$

$$où \; les \; constantes \; C_i \; ce \; sont \; les \; résidus \; de \; X(z) aux \; pôles \; p_i$$

$$C_i = (z - p_i) X(z)\big|_{z=p_i}$$

Sachant que :

$$X(z) = \frac{C_i}{z - p_i} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(k) = \begin{cases} 0 & si \;\; k = 0 \\ C_i p_i^{k-1} & si \;\; k \geq 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$ce \; qui \; donne:$$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(z - p_i)} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(k) = \begin{cases} 0 & si \;\; k = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i p_i^{k-1} & si \;\; k \geq 1 \end{cases}$$

Si un pôle p_n est d'ordre $q > 1$, la décomposition prend la forme

$$P_0(z)/Q(z) = \sum_{i=1, \neq n}^{N} \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(z - p_n)^j}$$

avec

$$\beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}z^{q-j}} \left[(z - p_n)^j P_0(z)/Q(z) \right]_{z=p_n}$$

En réalité, il est plus intéressant d'obtenir des fractions où z^{-1} apparaît au dénominateur, car les fractions dans ce cas correspondent directement à des transformées connues. Dès lors, tout ce qui vient d'être dit est appliqué pour des polynômes en z^{-1} et non pas en z.
Considérons la transformée donnée par

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

pour $|z| > 2$. Comme nous considérons que la variable est z^{-1}, le degré du numérateur est bien inférieur à celui du dénominateur.
Les pôles sont donnés par $z^{-1} = 1$ et $z^{-1} = 0.5$. On recherche donc une décomposition en fractions simples du type

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{0.5}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 0.5)} \\ &= \frac{\alpha_1}{z^{-1} - 1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1} - 0.5} \end{aligned}$$

On trouve en utilisant ce qui a été vu précédemment

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{-1}{z^{-1} - 0.5}$$

Dès lors,

$$X(z) = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

En identifiant ces fractions, on trouve de ce fait

$$x(n) = 2 \times 2^n\, u(n) - u(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$$

- **Méthode 3 : Inversion par intégrale**

Pour inverser une transformée en z, on peut s'aider utilement du *théorème de Cauchy* qui établit que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{l-1}\, \mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & \text{pour } l = 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où Γ est un contour qui entoure l'origine du plan et est parcouru dans le sens anti-horlogique.
En reprenant la définition de la transformée en z, en multipliant les deux membres par z^{l-1} et en intégrant le long d'un contour entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence, on trouve

$$\oint_\Gamma X(z)\, z^{l-1}\,\mathrm{d}z = \oint_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n+l-1}\,\mathrm{d}z$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_\Gamma z^{-n+l-1}\,\mathrm{d}z$$

où l'interversion de l'intégrale et de la somme est licite compte tenu du fait que l'on opère dans la zone de convergence de la transformée. En utilisant le théorème de Cauchy, on a finalement

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(z)\, z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

avec les conditions déjà énoncées à propos du contour d'intégration.
L'évaluation de l'intégrale dans le plan complexe se fait à l'aide du théorème des résidus, qui établit que l'intégrale le long d'un contour est donné par la somme des résidus de la fonction à intégrer, soit ici $X(z)\ zn-1$, dans le contour Γ. Le résidu rq à un pôle d'ordre q en $z = a$ est donné par

$$r_q = \lim_{z\to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}z^{q-1}} \left[X(z)\, z^{n-1}(z-a)^q\right]$$

Pour un pôle simple ($q = 1$) en $z = a$, l'expression du résidu $r1$ se réduit à

$$r_1 = \lim_{z\to a} \left[X(z)\, z^{n-1}(z-a)\right]$$

Considérons la transformée en z donnée par

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

et le domaine de convergence $|z| > 1$. En utilisant la formule d'inversion, on a donc que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{z^{n-1}}{1-z^{-1}}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma \frac{z^{n}}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

où le contour Γ peut être un cercle de rayon plus grand que l'unité.
Pour $n \geq 0$, on n'a qu'un pôle d'ordre 1 en $z = 1$ qui est entouré par le contour. Le résidu en ce pôle est donné par $r1$ valant

$$r_1 = \lim_{z\to 1} \left[z^n\right] = 1$$

III. 2 Obtention de $X(z)$ à partir de la T. de Laplace $X(p)$

1. $X(z) = \mathcal{Z}[X(p) = \sum_i X_i(p)]$ où $X_i(p)$ $fractions\ simples\ d'ordre 1\ ou\ 2$
   $en\ utilisant\ une\ table\ de\ conversion\ entre\ les\ deux\ transformées, on\ déduit$:
$$X(z) = \sum_i \mathcal{Z}[X_i(p)] = \sum_i X_i(z)$$

2. $X(z) = \sum_i résidus\ de\ \frac{z\,X(p)}{z - e^{Tp}}\ aux\ pôles\ de\ X(p)$

- **Exemple**

$$X(p) = \frac{1}{p+a} \xrightarrow{TZ} X(z) = (p+a)\frac{z\,X(p)}{z - e^{Tp}}\bigg|_{p=-a}$$

$$= (p+a)\frac{z}{z - e^{Tp}}\frac{1}{(p+a)}\bigg|_{p=-a} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

On obtient le même résultat puisque on sait que :

$$X(p) = \frac{1}{p+a} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = e^{-at} \xrightarrow{échant.} x(nT) = e^{-anT} \xrightarrow{T.Z} X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$