Les guides d'ondes

Introduction :

Les ondes TE et TM dans un guide d'onde sont des ondes électromagnétiques pour lesquelles le champ électrique ou le champ magnétique, respectivement, sont normaux à la direction de propagation Oz définie par l'axe du guide.

Nous allons étudier la propagation de ces ondes dans des guides métalliques sans pertes, à section rectangulaire, remplis d'un milieu diélectrique, non magnétique, linéaire, homogène, isotrope, de permittivité relative εr (voir figure suivante). Dans ces conditions les champs H et B ne se distinguent que par le facteur de conversion universel $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$.

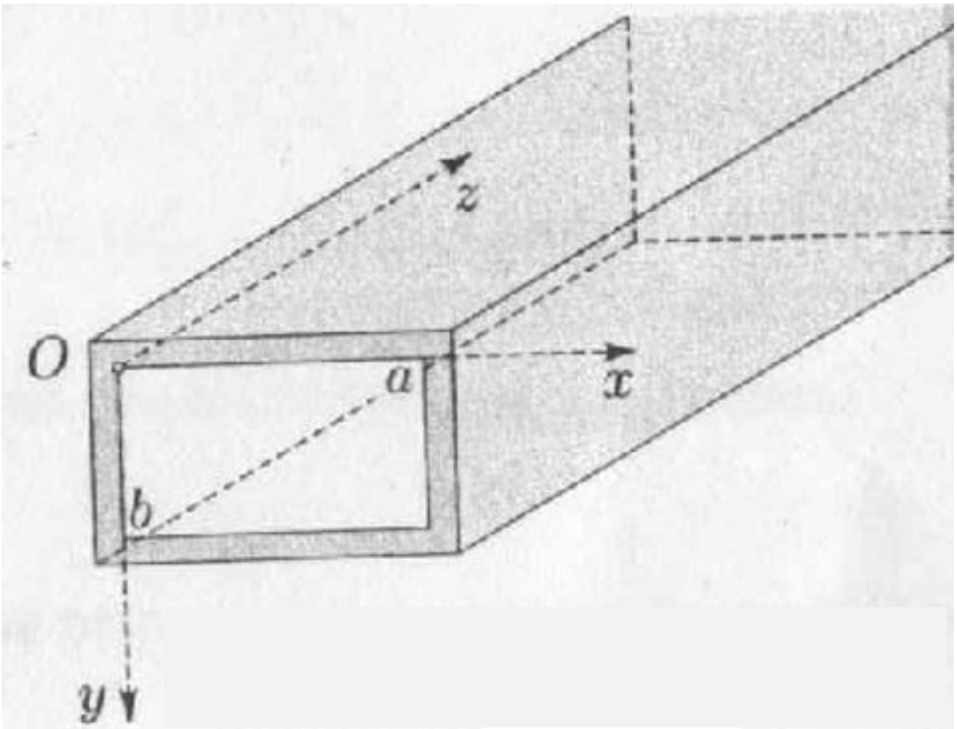


Figure1 : Expression du champ électromagnétique.

- Expressions des composantes du champ électromagnétique dans un guide d'onde.
  - Equations de Maxwell dans le guide en régime sinusoïdal.

En régime sinusoïdal les équations liant E et B s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{soit } \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = -i\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\omega\vec{E} = -i\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_r\vec{E}$$

puisque $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Les deux autres équations s'écrivent :

$\mathrm{div}\vec{B} = 0$ et $\mathrm{div}\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathrm{div}\vec{E} = 0$ en l'absence de charges étrangères.

En utilisant l'identité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \Delta$, il vient :

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\vec{E} = 0 \text{ et } \Delta\vec{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

Expressions des composantes transversales des champs.

Explicitons les équations de Maxwell dans la base cartésienne de (O, x, y, z) qui admet Oz comme direction de propagation et cherchons des solutions de la forme:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_m(x,y)\, e^{ik_g z} e^{-i\omega t}$$

$$\text{et } \vec{B}(x,y,z) = \vec{B}_m(x,y)\, e^{ik_g z} e^{-i\omega t}$$

$k_g = k_g' + ik_g''$ étant le nombre d'onde complexe dans le guide.

La première équation vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = i\omega\vec{B}$: donne :

$$\frac{\partial E_{m,z}}{\partial y} - ik_g E_{m,y} = i\omega B_{m,x} \qquad (2)$$

$$ik_g E_{m,x} - \frac{\partial E_{m,z}}{\partial x} = i\omega B_{m,y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E_{m,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{m,x}}{\partial y} = i\omega B_{m,z} \qquad (4).$$

Quant à la seconde $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = -i\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_r\vec{E}$, elle s'explicite selon :

$$\frac{\partial B_{m,z}}{\partial y} - ik_g B_{m,y} = -i\frac{\omega\varepsilon_r}{c^2}E_{m,x} \qquad (5)$$

$$ik_g B_{m,x} - \frac{\partial B_{m,z}}{\partial x} = -i\frac{\omega\varepsilon_r}{c^2}E_{m,y} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial E_{m,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{m,x}}{\partial y} = -i\frac{\omega\varepsilon_r}{c^2}E_{m,z} \qquad (7).$$

En combinant ces équations on aboutit à :

Mode dominant

Le mode TE dominant d'un guide rectangulaire est celui pour lequel la pulsation est la plus faible. On peut solutionner ces équations pour obtenir les quatre composantes transversales en fonction des composantes longitudinales.

(E_x, E_y, H_x et H_y en fonction de E_z et H_z) :

$$
\begin{aligned}
H_x &= \frac{j}{k_c^2}\left(\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\\
H_y &= \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
E_x &= \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\\
E_y &= \frac{j}{k_c^2}\left(-\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\qquad (1.a)
$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$ Où k_c est le nombre d'onde de coupure.

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$ est le nombre d'onde du matériau du guide d'onde.

Ondes TEM

Les ondes TEM sont caractérisées par $E_z = H_z = 0$. À partir des équations(1.a), on obtient que tous les champs transversaux sont nuls, à moins que $k_c^2 = 0$, ce qui donne un résultat indéterminé. On solutionne les équations de Maxwell pour obtenir :

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k$$

ce qui veut dire que $k_c = 0$ pour les ondes TEM.

Les ondes TEM peuvent seulement exister lorsque deux ou plusieurs conducteurs sont présents.

L'impédance de l'onde TEM est donnée par :

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$$

Ondes TE

Les ondes TE sont caractérisées par $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$. Dans ce cas-ci, $k_c \neq 0$, et

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde.

L'impédance de l'onde TE est :

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k\eta}{\beta}$$

Ondes TM

Les ondes TM sont caractérisées par $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$. Dans ce cas-ci, $k_c \neq 0$, et

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide d'onde.

L'impédance de l'onde TM est :

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta\eta}{k}$$

Fréquence de coupure

Les modes TM et TE possèdent une *fréquence de coupure* f_c : c'est une fréquence **au-dessous** de laquelle ces modes ne peuvent pas se propager dans le guide. Une onde se propage seulement lorsque β est réel, ce qui se produite seulement lorsque $k > k_c$. Le mode TEM ne possède pas de fréquence de coupure.

Normalement, dans un guide, on veut seulement 1 mode qui se propage. On peut donc calculer les fréquences d'opération d'un guide en fonction des fréquences de coupure des modes supérieurs.

Guide rectangulaire

Le guide rectangulaire est l'un des premiers types de lignes de transmission utilisés pour transporter des signaux hyperfréquences. Plusieurs composantes, tels que des coupleurs, détecteurs, ou atténuateurs sont disponibles commercialement pour des fréquences de 1GHz à plus de 220GHz. Bien que les circuits hyperfréquences sont de plus en plus miniaturisés, les guides rectangulaires sont encore utilisés à cause de leur capacité à transporter de grandes puissances.

Le guide rectangulaire est un guide ayant un seul conducteur, et donc il ne peut pas supporter de mode TEM. Les modes TE et TM ayant des fréquences de coupure, ce type de guide a une fréquence minimale d'opération.

La figure 2 montre un exemple de guide rectangulaire. On suppose que le guide est rempli d'un diélectrique ayant une permittivité ε et une perméabilité μ. Par convention, le côté le plus long du guide est sur l'axe *x*, ce qui donne *a* > *b*.

Mode TE

Pour le mode TE, la constante de propagation est :

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}^2\right) - \left(\frac{n\pi}{b}^2\right)}$$

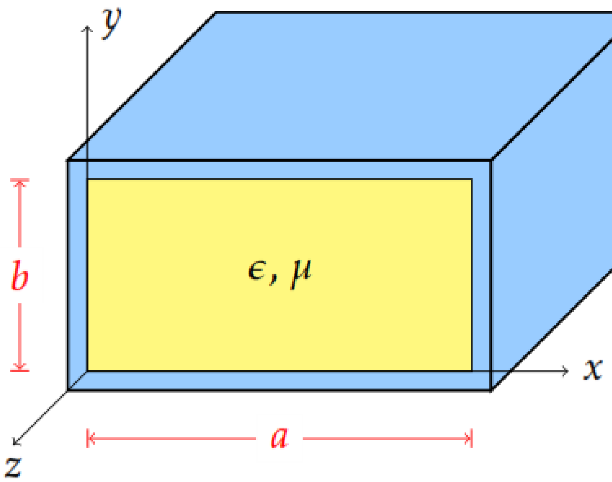


Figure2 : Guide rectangulaire

qui est réel seulement lorsque $k > k_c$, et donc la fréquence de coupure est :

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}^2\right) + \left(\frac{n\pi}{b}^2\right)}$$

Le mode ayant la fréquence de coupure la plus basse est appelé le mode dominant.
Puisque *a* > *b*, le mode dominant est TE_{10} ($m = 1$, $n = 0$) :

$$f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Le mode TE_{00} n'existe pas.

À une certaine fréquence d'opération f, seulement les modes ayant $f_c < f$ vont se propager ; les autres modes seront fortement atténués. On appelle ces modes ($f_c > f$) *évanescents*.

De façon générale, on veut qu'il n'y ait qu'un seul mode en propagation dans le guide, soit le mode TE_{10}. On choisit donc les dimensions du guide, selon la fréquence d'opération, pour avoir seulement ce mode.

L'atténuation due au conducteur pour le mode TE_{10} est :

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta}(2b\pi^2 + a^3 k^2) \quad [\mathrm{Np/m}]$$

Mode TM

Le mode TM possède la même constante de propagation et la même fréquence de coupure que le mode TE. Cependant, les modes TM_{00}, TM_{10} et TM_{01} n'existent pas. Le plus bas mode TM qui se propage est TM_{11}.

Polarisation linéaire :

Une onde polarisée linéairement ressemble à la figure 1.1.

- Le schéma représente la forme de l'onde à un instant donné. Quand le temps augmente, les ondulations se déplacent vers la droite, dans la direction de propagation (horizontale sur le schéma), comme des vagues sur l'eau.

- Les flèches indiquent les champs électrique et magnétique en chaque point le long du rayon horizontal. Ceux-ci sont perpendiculaires entre eux.

- La caractéristique d'un faisceau polarisé linéairement (on omet souvent le terme "linéairement") est que le champ électrique conserve la même direction le long du faisceau (direction verticale dans l'exemple ci-dessous).

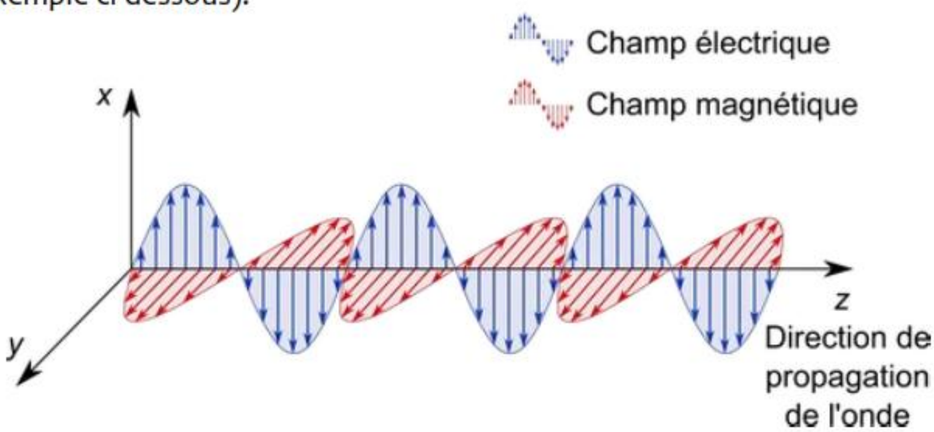


Figure3 : représentation des deux ondes E & H lors de la propagation selon l'axe Z.

Polarisation circulaire :

La polarisation circulaire est un peu plus complexe que la polarisation linéaire. Dans ce cas, le champ électrique change d'orientation le long du faisceau et décrit une spirale. Il en va de même pour le champ magnétique, qui est toujours orthogonal au champ électrique (non représenté sur le schéma) :

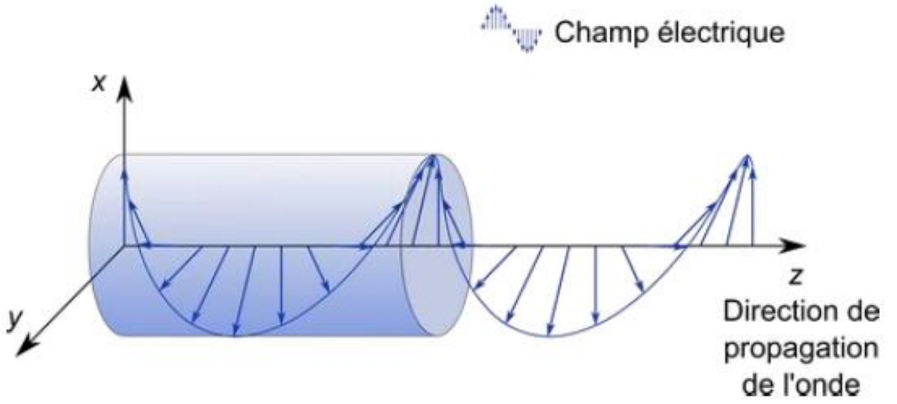


Figure4 : *Le champ électrique tourne le long d'un cylindre lorsque l'onde se propage dans la direction z. Le champ magnétique, non représenté, est perpendiculaire au champ magnétique et décrit donc lui aussi une spirale.*

En plus des polarisations linéaire et circulaire, il existe également la polarisation elliptique. Dans ce cas, le champ électrique décrit une spirale elliptique au lieu d'une spirale circulaire le long du faisceau.

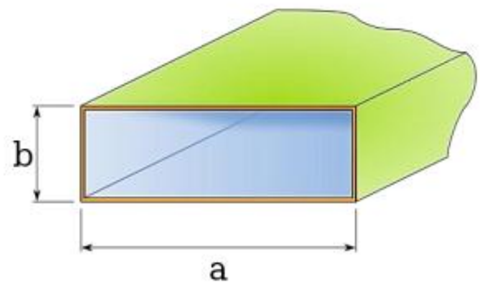
On souhaite propager dans ce guide une onde de pulsation ω. Son vecteur d'onde dans le vide a pour norme $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et sa longueur d'onde dans le vide est : $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$

On ne s'intéressera dans cette fiche à un champ électrique de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(x, y) expj(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

La continuité des composantes tangentielle $\vec{E}$ de et normale de $\vec{B}$, associée à la nullité des champs dans le métal, donnent les relations suivantes :

$E_T = B_N = 0$ en $x = 0$ et $x = a$, ainsi qu'en : $y = 0$ et $y = b$



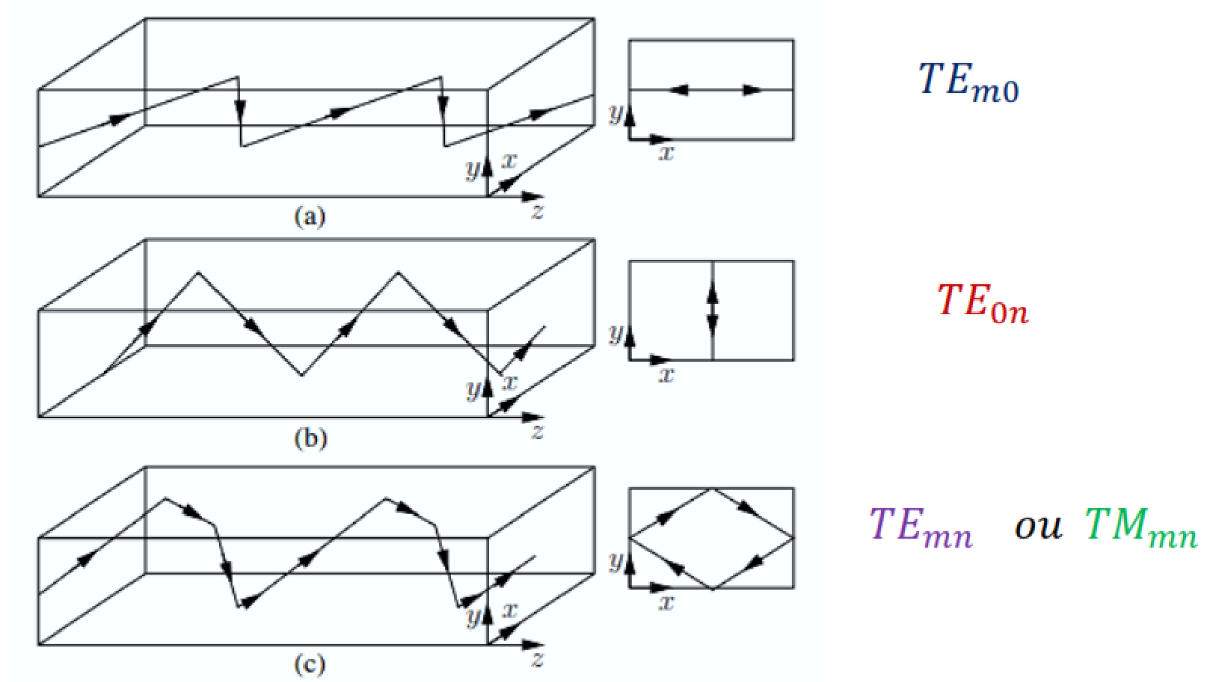
Dans le vide : $div\vec{E} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Longrightarrow f\ ne\ dépend\ que\ de\ x$

Equation de Maxwell de propagation s'écrit : $\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0$

$\frac{\omega^2}{c^2} < k^2$: conduit à des solutions en exponentielles réelles qui ne peuvent s'annuler en deux points sans s'annuler partout $\Longrightarrow$ cas non intéressant

$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$ les solutions sont affines et sont nulles partout comme auparavant

$\frac{\omega^2}{c^2} > k^2 : f(x) = E_0 sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) expj(\omega t - kz)\vec{e}_y$ cette solution est appelée mode n



Remarque :

Le champ précédent est transverse et porté seulement par $\vec{e}_y$; si le champ avait une composante selon $\vec{e}_x$, alors les amplitudes serait de la forme : $E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

Les modes seraient alors caractérisées par un couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

Deux modes supérieurs peuvent donc se propager :

- Le mode TE où le champ électrique est transverse avec :
  - $E_z = 0$
  - $H_z \neq 0$
- Le mode TM où le champ magnétique est transverse avec :
  - $E_z \neq 0$
  - $H_z = 0$

La condition de propagation impose que la pulsation ω de l'onde soit plus grande que la pulsation de coupure ω_c :

$$\omega \geq c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_c$$