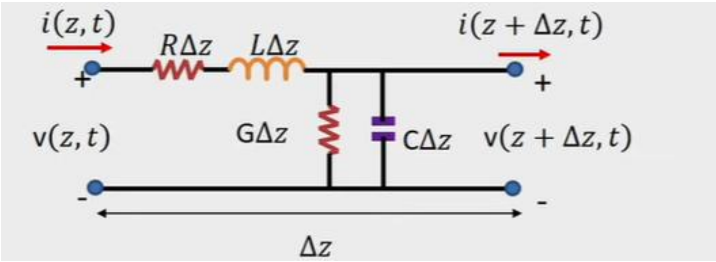
Equations des ondes sur les lignes

Soit une ligne formée par un bloc de réactance (R,L,G,C) sur un tronçon infiniment court Δz



$$v(z,t) - R\Delta z i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z+\Delta z,t) = 0$$

$$i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0.$$

En réorganisant les équations précédentes, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} v(z,t) &= Re\{V(z)e^{j\omega t}\} \\ i(z,t) &= Re\{I(z)e^{j\omega t}\} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= -Ri(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{dV(z)}{dz} = -(R+j\omega L)I(z) \\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= -Gv(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{dI(z)}{dz} = -(G+j\omega C)V(z) \end{aligned}$$

En faisant la seconde dérivée par rapport à z, on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \\ \frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \end{aligned}}$$

Où $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$, C'est la constante de propagation complexe.

La solution à ces équations d'onde est de la forme :

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}$$

- A une distance l = -z de la charge, l'impédance d'entrée vers la charge peut être donnée par:

$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{V_0^+(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l})}{V_0^+(e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l})} Z_0$$

- En prenant la valeur de Γ, on obtient :

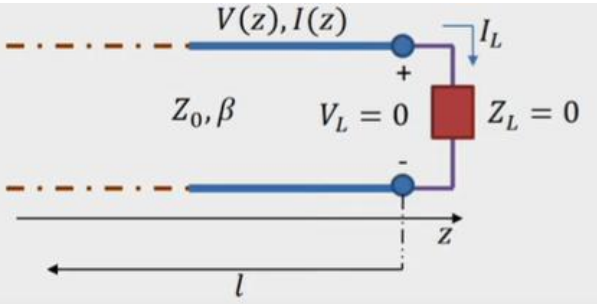
$$Z_{in} = \frac{(Z_L + Z_0)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_0)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_0)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_0)e^{-j\beta l}} Z_0$$

$$= \frac{Z_L(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_0(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_0(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_L(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})} Z_0$$

$$= \frac{Z_L \cos\beta l + jZ_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + jZ_L \sin\beta l} Z_0$$

$$\boxed{Z_{in} = \frac{Z_L + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + jZ_L \tan\beta l} Z_0}$$

Soit le cas d'un court-circuit avec Z_L=0 :



- $\Gamma = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$ and VSWR $= \infty$.

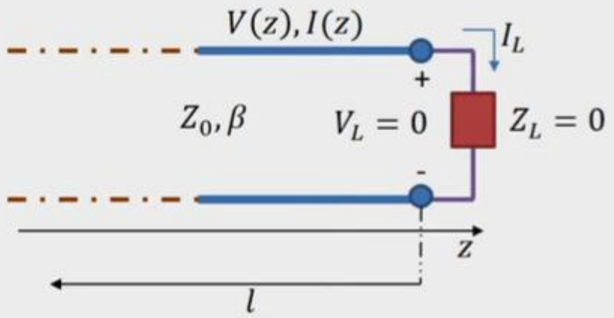
La tension et le courant peuvent être obtenus comme:

$$V(z) = V_0^+(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z})$$

$$V(z = -l) = V_0^+(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})$$

$$V(z = -l) = 2jV_0^+ \frac{(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{2j} = 2jV_0^+ \sin(\beta l)$$



$$\frac{V(z=-l)}{2jV_0^+} = \sin(\beta l)$$

De la même manière, on obtient :

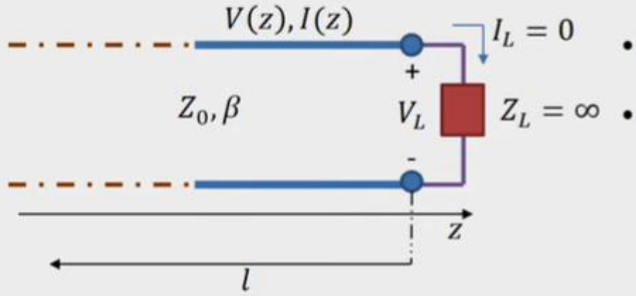
$$I(z=-l) = \frac{2V_0^+}{Z_0}\frac{\left(e^{j\beta l}+e^{-j\beta l}\right)}{2} = \frac{2V_0^+}{Z_0}\cos(\beta l)$$

Impédance d'entrée :

$$Z_{in} = \frac{0 + jZ_0 \tan\beta l}{Z_0 + j(0)\tan\beta l} Z_0$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_{in} = jZ_0 \tan\beta l}$$

Soit le cas d'un circuit ouvert avec $Z_L=\infty$:

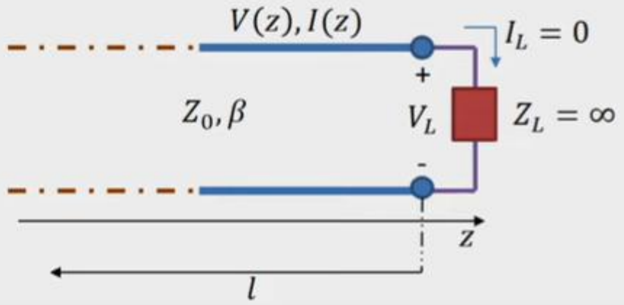


- $\Gamma = \frac{1 - Z_0/Z_L}{1 + Z_0/Z_L} = 1$ and $\mathrm{VSWR} = \infty$.
- La tension et le courant peuvent être obtenus comme:

$$\boxed{\begin{aligned} V(z) &= V_0^+\left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}\right) \\ I(z) &= \frac{V_0^+}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}\right) \end{aligned}}$$

$$V(z=-l) = V_0^+\left(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}\right)$$

$$V(z=-l) = 2V_0^+\frac{\left(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}\right)}{2} = 2V_0^+\cos(\beta l)$$



$$\frac{V(z=-l)}{2V_0^+} = \cos(\beta l)$$

De la même manière, on obtient :

$$I(z=-l) = \frac{2jV_0^+}{Z_0}\frac{\left(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}\right)}{2j} = \frac{2jV_0^+}{Z_0}\sin(\beta l)$$

L'Impédance d'entrée est :

$$Z_{in} = -jZ_0 \cot\beta l$$