Université Badji Mokhtar-Annaba, Département de Mathématiques

Série N°4 (Optimisation non linéaire)

Master 1 COTA-MA (2019–2020)

Exercice 1

1) Considérons la mise à jour de rang un

$$H_1 = I + uv^T$$

où $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $u \neq 0$. Trouver les valeurs propres de H_1, puis montrer que

$$\det(H_1) = 1 + u^T v.$$

2) Soit $u_1,\, u_2,\, v_1,\, v_2 \in \mathbb{R}^n$ et considérons la mise à jour de rang deux

$$H_2 = I + u_1 u_2^T + v_1 v_2^T.$$

Montrer que

$$H_2 = \left(I + u_1 u_2^T\right)\left[I + \left(I + u_1 u_2^T\right)^{-1} v_1 v_2^T\right],$$

puis, en utilisant la question précédente et le théorème de Sherman-Morrison-Woodburg, montrer que

$$\det(H_2) = \left(1 + u_1^T u_2\right)\left(1 + v_1^T v_2\right) - \left(u_1^T v_2\right)\left(u_2^T v_2\right).$$

Théorème (de Sherman-Morrison-Woodburg) : *Soit A une matrice $n \times n$ non singulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, alors la mise à jour de rang un $A + uv^T$ est inversible et*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Exercice 2 *Soit A une matrice $n \times n$ non singulière et $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$, alors la mise à jour de rang un $A + uv^T$ est inversible et*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Exercice 3 *On veut minimiser la fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b;\ \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *en utilisant la méthode SR1.*

1) *Montrer que si* $\delta_k = (\delta_k^1, \delta_k^2)^T$ *et* $\gamma_k = (\gamma_k^1, \gamma_k^2)^T$, *alors*

$$S_{k+1} = S_k + \begin{bmatrix} \frac{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)^2}{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\gamma_k^1+\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\gamma_k^1+\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \\ \frac{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)}{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\gamma_k^1+\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)\gamma_k^2} & \frac{\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)^2}{\left(\delta_k^1-\gamma_k^1\right)\gamma_k^1+\left(\delta_k^2-\gamma_k^2\right)\gamma_k^2} \end{bmatrix}.$$

2) *Montrer que* $t_k = \arg\min\{f(x_k + td_k),\, t > 0) = -\dfrac{g(x_k)^\top d_k}{d_k^\top A d_k},\ k = 0,\, 1,\, 2,\, ...$

3) *Calculer les trois premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $x_0 = (2,2)^T$ *et* $S_0 = I$. *Que peut on déduire.*

Exercice 4 *On veut minimiser la fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b;\ \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et en utilisant la méthode DFP.*

3) *Calculer les trois premières itérations de l'algorithme DFP pour minimiser* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $x_0 = (2,2)^T$ *et* $S_0 = I$. *Que peut on déduire.*

Exercice 5 *Soit la fonction donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b;\ \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

— *Calculer les quatre premières itérations de l'algorithme SR1 pour minimiser* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $x_0 = (-1,1)^T$ *et* $S_0 = I$. *Que peut on déduire ?*