T.D

Hydraulique Générale

I. HYDROSTATIQUE

§ 1. Pression hydrostatique

La tansion normale de la force de pression est appelée pression hydromécanique (au cas où le liquide se trouve en repos, pression hydrostatique).

$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta \omega} \qquad (1)$$

où p - pression hydrostatique, P - force de pression, qui agit sur l'aire élémentaire $\Delta\omega$.

La pression hydrostatique est dirigée normalement à la surface et sa valeur en un point est la meme dans toutes les directions autour de ce point.

En cas général la pression hydrostatique est en fonction de coordonnées du point.

$$p = f(x,y,z) \qquad (2)$$

L'unité de mesure de la pression est $1 \frac{N}{m^2}$.

$1 \frac{N}{m^2} = 1$ Pa (Pascal); 10^3 Pa = 1 kPa; 10^6 Pa = 1 mPa.

On distingue trois notions de la pression: absolue, éffective et vide (dépression).

Les relations entre ces pressions sont:

$$p_{abs} = p_{at} + p_{ef}, \qquad (3)$$

$$p_v = p_{at} - p_{abs}, \qquad (4)$$

où p_{at} - pression atmosphérique.

La question principale de l'hydrostatique est la détermination de la pression en fonction de coordonnées du point. Cette fonction s'exprime par l'équation differentielle de l'hydrostatique:

$$dp = \rho\,(X dx + Y dy + Z dz), \qquad (5)$$

X, Y, Z - composantes de la force massique unitaire, ρ - masse spécifique ou la densité du liquide.

Une surface dans le liquide, en tous les point de laquelle la pression est la même est appelée surface d'égale pression ou surface de niveau.

Vue que $p = const$, $dp = 0$ et d'après l'équation (5) on trouve l'équation de la surface de niveau:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \; . \qquad (6)$$

Au cas où le liquide se trouve sous l'action d'une seule force massique - la pesanteur, la pression est en fonction de la profondeur du point. Cette fonction a la forme:

$$p = p_o + \rho gh \quad ou \quad p = p_o + \gamma h \qquad (7)$$

avec: - pression en un point quelconque, p_o - pression sur la surface de liquide, g - accélération de la pesanteur, = g -poids spécifique du liquide.

L'équation (7) s'appelle équation fondamentale de l'hyrostatique.

La pression dans un liquide, comme le montre l'équation (7) varie linéairement avec la profondeur et est constante à une profondeur donnée, c.àd. les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

Au cas où le recipient est ouvert $p_o = p_{at}$ et la surface du liquide est appelée surface libre. Dans ce cas l'équation (7) peut - être écrite comme suite:

$$p = p_{at} + \rho gh \quad ou \quad p = p_{at} + \gamma h \qquad (8)$$

Le produit gh représente la pression effective

$$p_{ef} = \rho gh \quad où \quad p_{ef} = \gamma h . \qquad (9)$$

La formule (9) permet d'exprimer la pression effective par la hauteur piézométrique:

$$h = \frac{p_{ef}}{\rho g} \quad ou \quad h = \frac{p_{ef}}{\gamma} \; . \qquad (10)$$

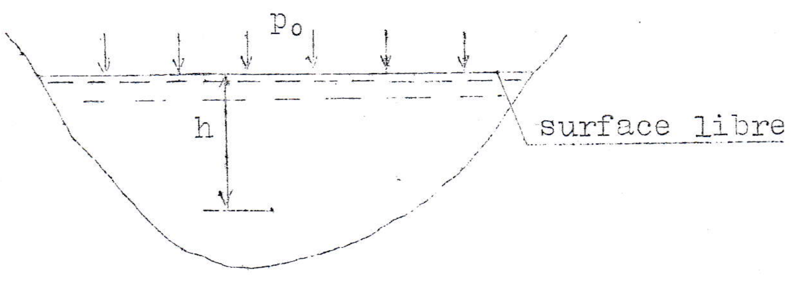


fig. 1.

Exercices

Exemple 1. Exprimer la pression effective $p_{ef} = 230$ kPa par la hauteur d'eau.

Solution

$\rho_{eau} = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, $p_{ef} = 230$ kPa = $= 230 \cdot 10^3$ Pa.

$$h = \frac{p_{ef}}{\rho g} = \frac{230 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} = 23{,}5 \text{ m.} \qquad \left(1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{m}{s^2} \right)$$

Exemple 2. Calculer la pression absolue et effective sur le niveau de l'eau, si l'indication du piézomètre est h.

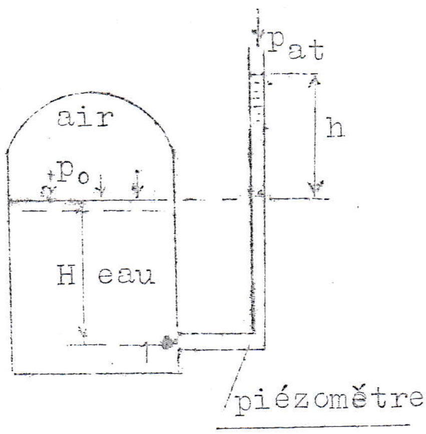


Fig. 2.

Application numérique

$h = 2{,}3$ m, $p_{at} = 98$ kPa.

Solution

A l'aide des équations (7) et (8) on détermine la pression absolue en point 1 (fig.2). Soit H la profondeur du point 1.

$p_{1abs} = p_{at} + \rho g(h+H)$ du coté de piézomètre,

$p_{1abs} = p_{o\ abs} + \rho gH$ du coté de récipient.

Donc, $p_{o\ abs} = p_{at} + \rho gh$

$p_{o\ abs} = 98000 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}3 = 120500$ Pa $= 120{,}5$ kPa.

D'après la formule (3) on trouve:

$p_{o\ ef} = p_{o\ abs} - p_{at} = \rho gh$

$p_{o ef} = 1000;9{,}81 \cdot 2{,}3 = 22500$ Pa $= 22{,}5$ kPa.

$p_{oabs} = 120{,}5$ kPa; $p_{oef} = 22{,}5$ kPa.

Exemple 3. Calculer la pression absolue et le vide sur le niveau de l'eau, si l'indication du manomètre à mercure est h.

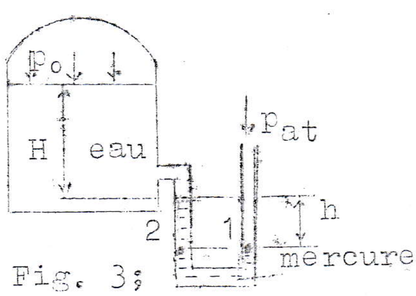


Fig. 3;

Application numérique

$h = 200$ mm; $H = 1{,}4$ m; $p_{at} = 96$ kPa.

Solution

Déterminons la pression absolue aux points 1 et 2.

$p_1 = p_2$ puisque dans un liquide homogène les plans horizontaux sont les surface d'égale pression.

$$p_1 = p_{o\,abs} + \rho_{eau} gH + \rho_{mer} gh; \quad p_2 = p_{at},$$

Alors, $p_{o\,abs} = p_{at} - \rho_{eau} gH - \rho_{mer} gh$

$$p_{o\,abs} = 96000 - 1000 .\ 9,81 .\ 1,4 - 13600 .\ 9,81 .\ 0,2$$

$$p_{o\,abs} = 55600 \text{ Pa} = 55,6 \text{ kPa}.$$

$$p_v = p_{at} - p_{abs} \equiv \rho_{eau} gH + \rho_{mer} gh$$

$$p_v = 96 - 55,6 = 40,4 \text{ kPa}$$

$$p_{o\,abs} = 55,6 \text{ kPa}; \quad p_v = 40,4 \text{ kPa}.$$

<u>Exemple 4.</u> Calculer la différence des pressions p_A et p_B des récipients représentés, si l'indication du manomètre differentiel est égale h=250mm.

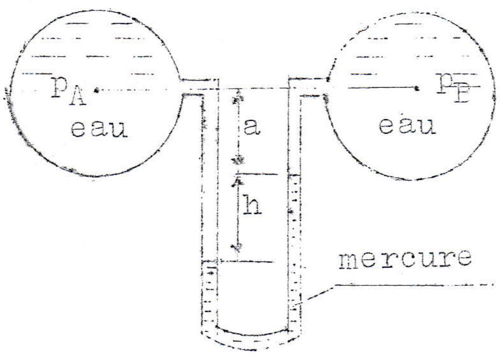


Fig.4.

Solution

On détermine les pressions aux points 1 et 2.

$$p_1 = p_A + \rho_{eau} g(a + h);$$

$$p_2 = p_B + \rho_{eau} ga + \rho_{mer} gh.$$

Vue que $p_1 = p_2$, on trouve:

$p_A - p_B = gh(\rho_{mer} - \rho_{eau})$; c'est la formule du manomètre différentiel.

$$p_A - p_B = 9,81 .\ 0,25\ (\ 13600 - 1000\ ) = 30870 \text{ Pa}$$

$$p_A - p_B = 30,87 \text{ kPa}.$$

Exemple 5. Un récipient cylindrique contenant l'eau s'appuie sur un plongeur.

Déterminer l'indication du manomètre M - p_M.

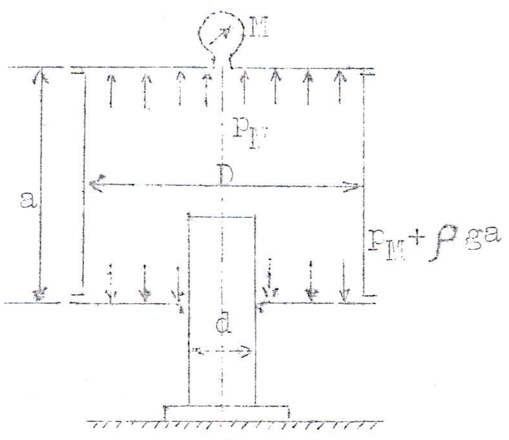


Fig 5.

Application numérique

D = 0,2 m; d = 0,1 m;

a = 0,4 m; m = 570 kg,

m etant la masse du récipient.

Solution

Examinons l'équilibre du récipient sous l'action des forces de pression de l'eau sur les surfaces intérieures du récipient et du poids du récipient.

La pression sur la base supérieure du récipient est p_M, et sur la base inférieure - $p_M + \rho ga$.

Projetons les forces sur l'axe vertical.

$$p_M \frac{\pi D^2}{4} - (p_M + \rho ga) \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - mg = 0$$

donc, $$p_M = \rho ga \left[\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1\right] + \frac{mg}{\pi d^2/4},$$

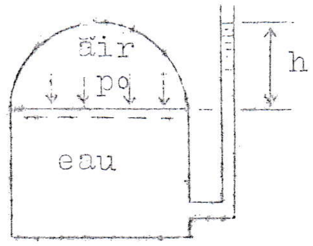
$$p_M = 1000.9,81.0,4 \left[\left(\frac{0,2}{0,1}\right)^2 - 1\right] + \frac{570.9,81}{\frac{3,14}{4}.0,1^2}$$

$$p_M = 725000 \text{ Pa} = 725 \text{ kPa}.$$

1

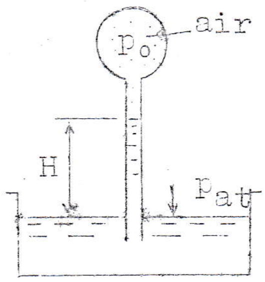
Problèmes

I-1. Déterminer la hauteur de l'eau dans la prise de pression (piézomètre) à partir du niveau de l'eau, si la pression manométrique (effective) sur le niveau de l'eau est égale $p_o = 11$ kPa.



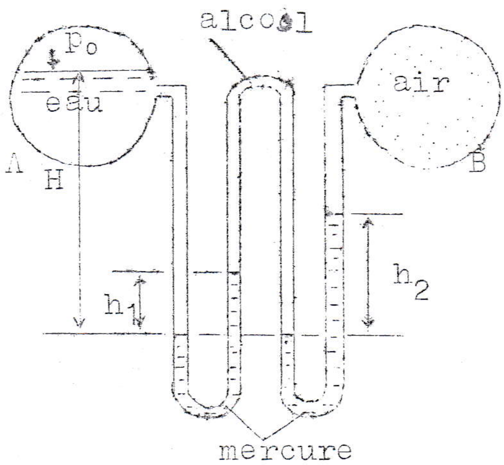
Réponse: h = 1,12m

I-2. Déterminer la hauteur de l'eau dans le tube vertical, si la pression absolue de l'air dans le ballon est égale à $p_o = 85$ kPa et la pression atmosphérique est égale à $p_{at} = 96$ kPa.



Réponse: H = 1,12 m.

I-3. Le dispositif représenté (manomètre différentiel à deux liquides) sert à la détermination de la pression.



Déterminer la pression effective - p_{ef} de l'air dans le ballon B.

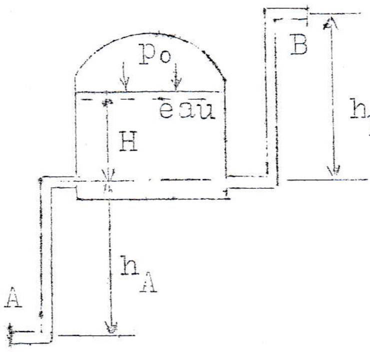
Application numérique

$p_{oef} = 48$ kPa; $h_1 = 150$ mm;

$H = 0{,}5$ m; $h_2 = 250$ mm.

Réponse: $p_{Bef} = 6{,}6$ kPa.

I-4. Déterminer la pression absolue et effective aux points A et B du dispositif représenté.



Application numérique

$p_{oabs} = 150$ kPa; $H = 1{,}4$ m;

$h_A = 3{,}2$ m; $h_B = 4{,}1$ m.

$p_{at} = 100$ kPa.

Réponse: $p_{Aabs} = 195$kPa; $p_{Aef} = 95$kPa

$p_{Babs} = 123{,}5$kPa;

$p_{Bef} = 23{,}5$ kPa.

§ 2. Force de pression d'un liquide sur une paroi plane

La force de pression d'un liquide sur une paroi plane est égale au produit de l'aire mouillée de la paroi par la pression au centre de gravité de l'aire.

$$P = p_c \omega \qquad (11)$$

$$\text{où} \quad p_c = p_o + \rho g h_c \qquad (12)$$

avec p_o - pression sur la surface du liquide,
p_c - pression au centre de gravité de l'aire,
h_c - profondeur du centre de gravité de l'aire,
ω - aire mouillée de la paroi.

Au cas où la pression p_o est égale à la pression atmosphérique, la force de pression effective qui agit sur la paroi plane est égale à

$$P = \rho g h_c \omega \qquad (13)$$

Le point d'application de la force de pression est appelé le centre de pression.

On détermine la position du centre de pression par sa coordonnée vertical (profondeur) - h_d:

$$h_d = h_c + \frac{J_{cc}}{\omega h_c} \sin^2 \alpha \qquad (14)$$

où J_{cc} - moment d'inertie de l'aire ω par rapport à l'axe parallèle à la surface libre et qui passe par le centre de gravité c (tableau N),
- angle d'inclinaison de la paroi (fig. 6).

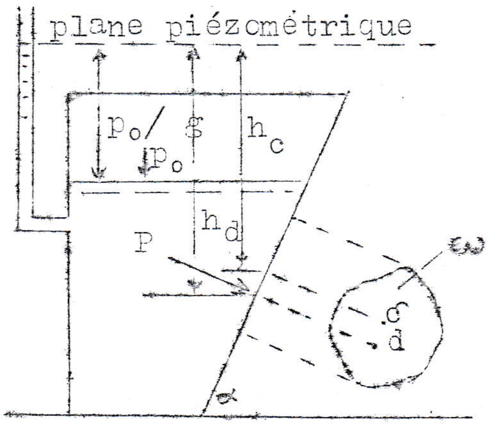


Fig. 6.

Au cas où sur le niveau du liquide il y a une pression effective p_o on détermine la force de pression par la formule:

$$P = (p_o + \rho g h_c)\omega \qquad (11).$$

Pour la détermination de la position du centre de pression dans ce cas il est plus commode de faire le calcul en prenant comme la surface libre le plan piézométrique (fig 6). Pour trouver la position de ce dernier, il faut exprimer la pression effective p_0 par la hauteur piézométrique correspondante - $p_0/\rho g$. Quand $p_0 > 0$ le plan piézométrique se trouve en haut par rapport au niveau du liquide et quand $p_0 < 0$ en bas.

Pour la paroi rectangulaire ayant la base parallèle à la surface libre, il est plus commode de déterminer la force de pression et le centre de pression graphiquement.

Problèmes resolus

Exemple 1. Calculer la force de pression sur la paroi rectangulaire et la position du centre de pression.

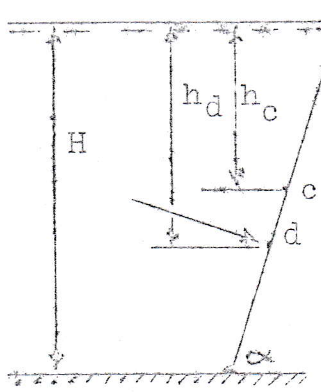


Fig. 7.

Application numérique

$H = 4,2$ m; $\alpha = 60°$; $b = 2$ m (largeur de la paroi).

Solution

$P = \rho g h_c$, où $h_c = H/2$,

$\omega = bH/\sin\alpha$, donc,

$P = \rho g \frac{H}{2}\, b \frac{H}{\sin\alpha}$,

$P = 1000.9,8.2,1.2\frac{4,2}{\sqrt{3}/2} = 195300$ N $= 195,3$ kN.

Point d est le centre de pression (fig.7).

$h_d = h_c + \frac{I_{cc}}{h_c \omega} \sin^2\alpha$, $I_{cc} = \frac{b\left(\frac{H}{\sin\alpha}\right)^3}{12}$, $y_D = y_C + \frac{I_{xC}}{y_C . S}$

Après simplification $h_d = \frac{2}{3} H = 2,8$ m. $= \frac{H}{2\sin\alpha} + \frac{b(H/\sin\alpha)^3/12}{\frac{H}{2\sin\alpha} \cdot \frac{H}{\sin\alpha} \cdot b}$

Solution graphique

Le triangle CAB représente la répartition de la pression effective sur la paroi.

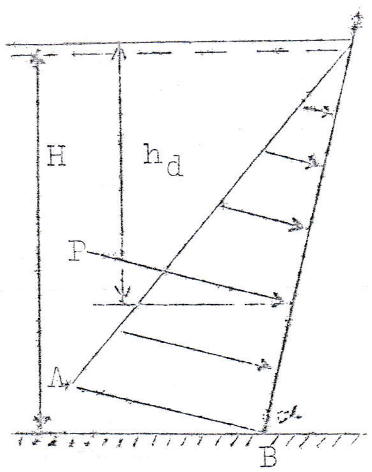


Fig. 8.

Déterminons le volume de la prisme triangulaire, qui a la base triangle CAB et la hauteur b.

$W_{pr} = \omega_{CAB} . b = \frac{1}{2} AB; CB . b$,

Vue que $AB = \rho g H$ et $CB = \frac{H}{\sin\alpha}$,

$W_{pr} = \frac{1}{2}\ gH \frac{H}{\sin} b =$

$= \rho g \frac{H}{2} \omega = \rho g h_c \omega = P.$

La force de pression est égale au volume de la prisme triangulaire.

La force de pression passe par le centre de gravité du triangle CAB. De ce fait $h_d = \frac{2}{3} H.$

Exemple 2. Le système représenté (fig.9) est en équilibre. Déterminer la force P_2, qui agit sur le piston 2, si P_1 = 147 N; D = 300 mm; d = 50 mm; h = 30 cm.

On néglige les masses des pistons.

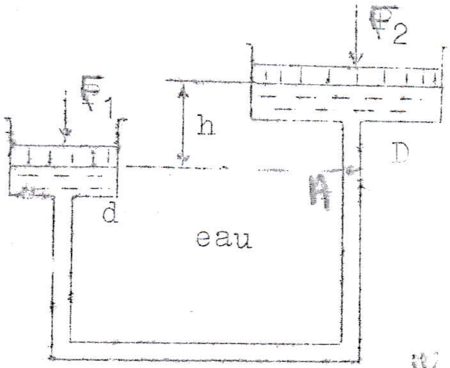


Fig.9. force

Solution

Les pression sous les piston sont:

$$\text{pression } p_1 = \frac{F_1}{\pi d^2/4} \quad \text{et} \quad \text{pression } p_2 = \frac{F_2}{\pi D^2/4}.$$

Dans un liquide homogène sur les plans horizontaux la pression est constante

$$p_1 = p_A, \text{ mais } p_A = p_2 + \rho g h.$$

$$\text{Donc,} \quad \frac{F_1}{\pi d^2/4} = \frac{F_2}{\pi D^2/4} + \rho g h.$$

$$\text{D'où} \quad F_2 = F_1 D^2/d^2 - \rho g h \pi D^2/4.$$

$$F_2 = 147\left(\frac{300}{50}\right)^2 - 1000.9{,}8.0{,}3\pi 0{,}3^2/4,$$

$$F_2 = 5080 \text{ N} = 5{,}08 \text{ kN}.$$

Exemple 3. L'orifice quadratique b×b dans la paroi verticale du réservoir se ferme par la vanne A, qui se tourne autour du point (charnière) C.

Déterminer la charge minimum G pour que la vanne reste fermer.

Donnes: b = 1 m; H = 2,2 m; h = 0,4; a = 1,4 m.

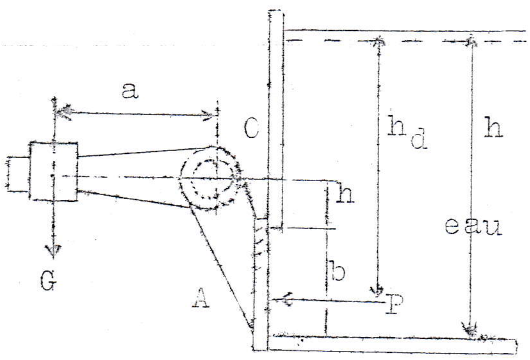


Fig. 10.

Solution

La force de pression de l'eau sur la vanne est égale

$$P = \rho g h_c \omega = \rho g (H - b/2) b^2.$$

$P = 1000.9,8(2,2 - 0,5).1,1 = 16700\ N = 16,7\ kN.$

La profondeur du centre de pression

$$h_d = h_c + \frac{I_{cc}}{\omega h_c}, \qquad (\sin\alpha = 1), \quad \text{alors}$$

$$h_d = H - b/2 + \frac{b^4}{12b^2(H-b/2)}; \quad \text{donc}, \quad h_d = 1,75\ m.$$

Pour que la vanne soit en équilibre (position fermée) la somme algébrique des moments des forces, qui agissent sur la vanne, doit être égale à zéro (par rapport au point O).

$$P\,h_d - (H - b - h) - G.a = 0, \quad \text{d'où}$$

$$G = P(h_d - H + b + h)/a,$$

$$G = 11,34\ kN.$$

Exemple 4. Déterminer la force de pression sur la cloison du récipient et le centre de pression.

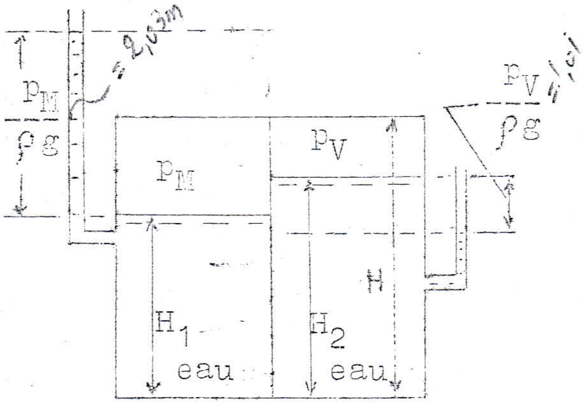


Fig. 11.

Les indications du manomètre M et manomètre de vide V sont respectivement:

$p_M = 20\ kPa$, $p_V = 10\ kPa$.

$H_1 = 2,5\ m$; $H_2 = 3\ m$; $b = 1m$

(b - largeur de la cloison).

$H = 3,5\ m.$

Solution

On détermine les positions des planes piézométriques de deux parties du récipient

$$\frac{p_M}{\rho g} = \frac{20000}{1000.9,8} = 2,04\ m, \quad \frac{p_V}{\rho g} = \frac{10000}{1000.9,8} = 1,02\ m.$$

Vu que $p_V = - p_{ef}$, on a $\frac{p_{ef}}{\rho g} = - 1,02\ m.$

Hauteur piézométrique pour la partie A du récipient est positive et se trouve en haut par rapport au niveau de l'eau. Pour la partie B hauteur piézométrique est négative et se trouve en bas par rapport au niveau (fig.11).

On détermine les forces, qui agissent sur la cloison:
force de pression manométrique - $P_M = p_M . H . b$,

force de depression - $P_V = p_V . H . b$,

force de pression de l'eau du coté de la partie A du réservoir - $P_1 = \rho g \frac{H_1}{2} H_1 b$,

force de pression de l'eau du coté de la partie B du réservoir - $P_2 = \rho g \frac{H_2}{2} H_2 b$.

Donc, $P_M = 20 . 3{,}5 . 1 = 70$ kN, $P_V = 10 . 3{,}5 . 1 = 35$ kN,

$P_1 = 1 . 9{,}8 . 2{,}5^2 . 1/2 = 30{,}61$ kN,

$P_2 = 1 . 9{,}8 . 3^2 . 1/2 = 44{,}1$ kN.

Toutes les forces sont parallèles. Les forces P_M, P_V

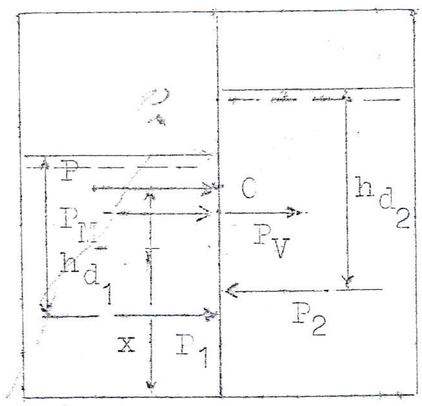


Fig. 12.

et P_1 ont le même sens et la la force P_2 a le sens opposé (fig.12).
La force résultante est

$$P = P_M + P_V + P_1 - P_2.$$

Alors, $P = 91{,}51$ kN.

Les points d'application des forces P_M et P_V coïncident. C'est le point C (centre de gravité de la surface de cloison). Les positions des points d'application des forces P_1 et P_2 on les trouve à l'aide de ces profondeurs:

$$h_{d_1} = \frac{2}{3} H_1 = 1{,}67 \text{ m}, \quad h_{d_2} = \frac{2}{3} H_2 = 2 \text{ m}.$$

On trouve la position du point d'application de la force résultante à l'aide du théorème de

$$P\, x = P_M \frac{H}{2} + P_V \frac{H}{2} + P_1 \frac{H_1}{3} - P_2 \frac{H_2}{3}.$$

On trouve x = 1,8 m.

§3. Force de pression d'un liquide sur des parois courbes. Loi d'Archimède

En pratique le plus souvent, on a l'affaire à des parois cylindriques ou bien sphériques à plan de symétrie vertical. Dans ces cas la force de pression du liquide peut être représentée par ses deux composantes: horizontale - P_X et verticale - P_z situées dans le plan de symétrie.

Soit CB une paroi cylindrique dont la génératrice est perpendiculaire au plan de symétrie ZCX (fig.13).

Pour trouver la composante horizontale de la force totale, il faut projeter la surface cylindrique sur le plan ZCY et puis déterminer cette force sur l'aire de projection ω_{zoy} comme le cas d'une paroi plane.

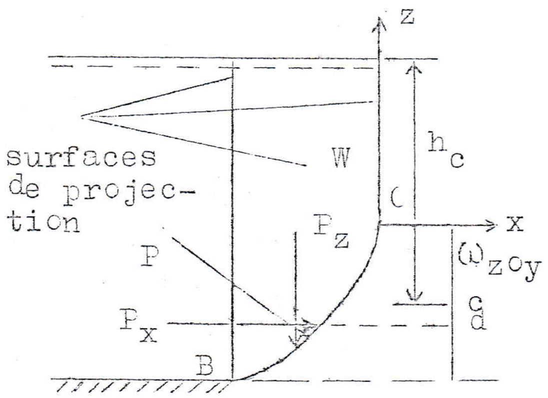


Fig.14.

$$P_x = \rho g h_c \omega_{zoy} \qquad (15)$$

où h_c - profondeur du centre de gravité de l'aire ω_{zoy}.

La composante horizontale P_x passe par le centre de pression de l'aire ω_{zoy} (point d).

La composante verticale P_z de la force de pression est égale au poids du liquide dans le volume du corps de pression.

$$P_z = \rho g W, \qquad (16)$$

où W - volume du corps de pression.

Le volume W est limité par: la surface de paroi, la surface de projection verticale et la surface libre (ou bien le plan piézométrique).

La composante P_z passe par le centre de gravité du volume W et elle est dirigée vers le bas au cas où la paroi est mouillée en haut et vers le haut au cas où la paroi est mouillée en bas.

Après avoir trouvé les composantes P_x et P_z on détermine la force résultante P.

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}. \qquad (17)$$

On détermine le sens de la force totale par la formule suivante

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_z}{P_x}, \qquad (18)$$

où β - angle d'inclinaison de la force P par rapport à l'horizontale.

Pour les parois courbes ayant la courbure constante, la force P passe par le centre de courbure.

La méthode de détermination de la force de pression qui vien d'être exposée peut être aussi employée pour les parois sphériques.

<u>Loi d'Archimède</u>. Un corps quelconque plongé dans un fluide éprouve une poussée dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé.

$$R = \rho g W, \qquad (19)$$

où R - poussée d'Archimède,
ρ - masse spécifique du fluide,
W - volume du corps.

Le point d'application de la force R est le centre de gravité du volume W.

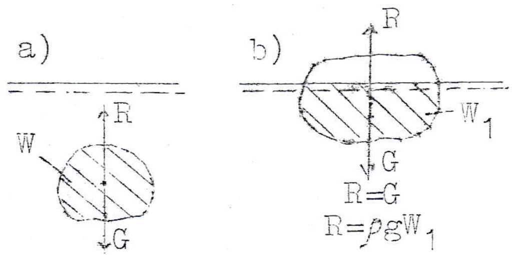


Fig.15.

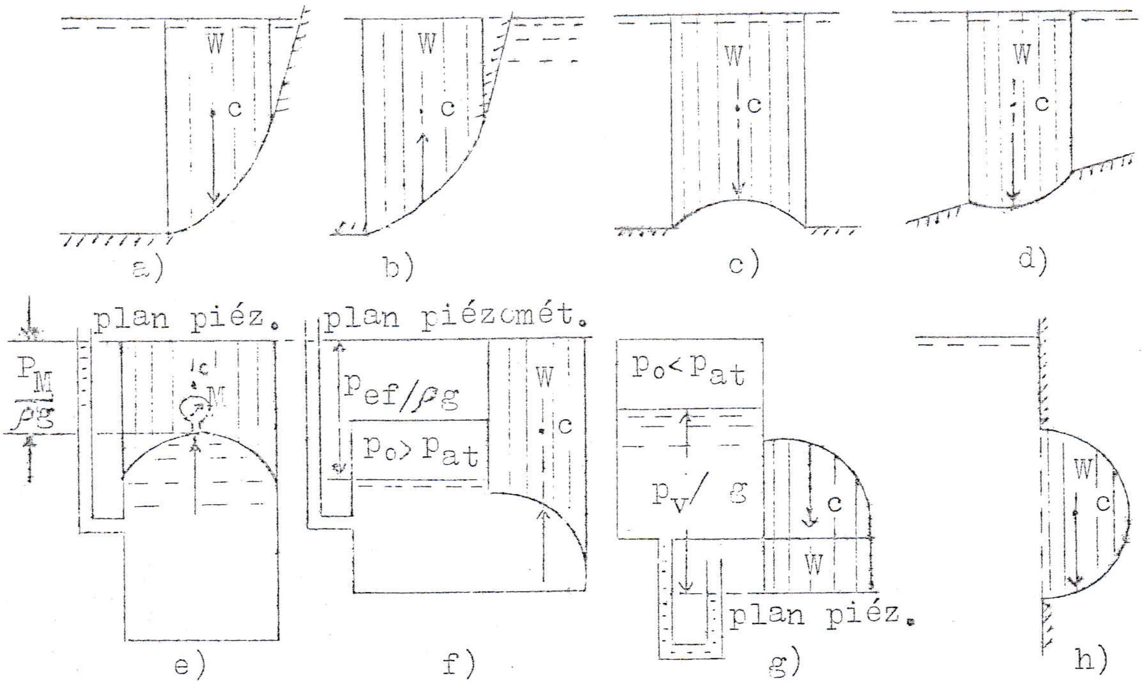
Donc, sur un corps plongé dans un fluide deux forces agissent, poids du corps G et la force d'Archimède R. Suivant la proportion qui existe entre ces forces, trois cas sont possibles: 1) $R < G$, le corps se plonge, 2) $R = G$, le corps est en position indifférent et 3) $R > G$, le corps flotte. Dans le dernier cas la force d'Archimède se détermine par la formule:

$$R = \rho g W_1, \qquad (20)$$

où W_1 - partie du volume de corps plongé dans le liquide (fig.15,b)

Problèmes résolus

Exemple 1. Construire le corps de pression et tracer la composante verticale - P_z de la force totale pour les parois courbes suivantes:



Pour les cas a), b), c), d) et h) sur le niveau du liquide la pression est atmosphérique, c.à.d. le niveau est la surface libre.

Pour les cas e), f), g) la pression sur le niveau du liquide est differe de la pression atmosphérique. Dans tous ces cas il faut tracer les plans piézométriques et les conciderer comme les surfaces libres fictives.

En cas e) on exprime la pression manométrique par la hauteur piézométrique.

En cas f) la pression effective $p_{ef} = p_o - p_{at}$ et est positive (le plan piézométrique se trouveen haut).

En cas g) la pression effective sur le niveau du liquide $p_{ef} = p_o - p_{at}$ et est négative (le plan piézométrique se trouve en bas).

Le cas h) est caracterisé par le fait que le volume du corps de pression ne dépend pas de la position de la surface libre.

Le point C est le centre de gravité du volume W.

Exemple 2. Calculer la force de pression de l'eau sur la vanne secteurielle d'un barrage.

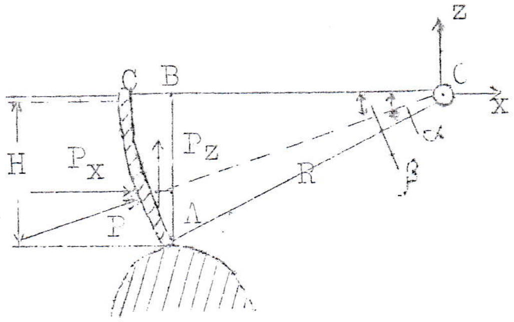


Fig.16.

Application numérique

H = 4m; R = 8m; b = 6m (largeur de la vanne).

Solution

Projetons la surface cylindrique AC sur le plan paralèle au plan ZOY.

$$\omega_{zoy} = H\cdot b$$

La composante horizontale P_x sera:

$$P_x = \rho g h_c \omega_{zoy} = \rho g \frac{H}{2} H b$$

$$P_x = 1000\cdot 9{,}8\cdot 8\cdot 6 = 470400 \text{ N} = 470{,}4 \text{ kN}.$$

La composante verticale P_z sera:

$$P_z = \rho g(\omega_{OAC} - \omega_{OAB})b, \text{ où}$$

$$\omega_{OAC} = \pi R^2 \alpha/360, \quad \sin\alpha = H/R = 0{,}5, \quad \alpha = 30°.$$

Donc, $\omega_{OAC} = 3{,}14\cdot 8^2\cdot 30/360 = 16{,}74 m^2$.

$$\omega_{OAB} = \frac{1}{2} AB\cdot BO = \frac{1}{2} H\sqrt{R^2 - H^2} = 13{,}84 m^2.$$

Alors, $P_z = 1000\cdot 9{,}8(16{,}74 - 13{,}84)\cdot 6 = 170520 N = 170{,}5 kN$.

La force de pression P sera:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{470{,}4^2 + 170{,}5^2} = 500 \text{ kN}.$$

L'inclinaison de la force P par rapport à l'horisontal est:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{P_z}{P_x} = \frac{170{,}5}{470{,}4} = 0{,}36, \text{ alors, } \beta = 20°.$$

Vue que la surface AC est cylindrique sa courbure est constante et par concéquence la force P passe par le point O.

Exemple 3 . Calculer la force de pression de l'eau sur la surface cylindrique ACO.

Préciser la position de cette force.

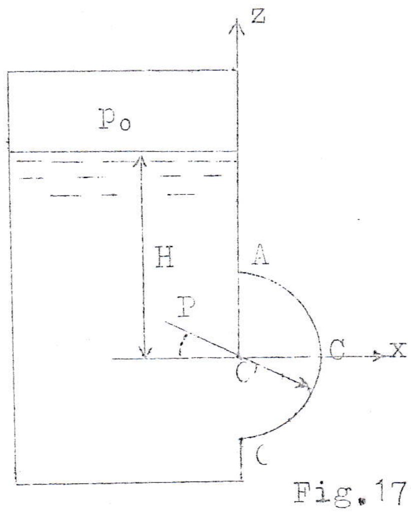


Fig.17

Application numérique

H = 2m; r = 1m; b = 2m (largeur de la surface cylindrique), la pression effective sur le niveau - p_o = 19600 Pa.

Solution

La composante horizontale de la force de pression est:

$$P_x = (p_o + \rho g h_c)\omega_{zoy} = (p_o + \rho g H)\cdot 2r\cdot b,$$

$$P_x = (19600 + 1000\cdot 9{,}8\cdot 2)\cdot 2\cdot 2 = 156800 \text{ N}$$

$$P_x = 156{,}8 \text{ kN}$$

La composante verticale de la force de pression est:

$$P_z = \rho g\cdot W_{ACC} \qquad \text{(cas h) ,page 21),}$$

$$P_z = \rho g \frac{\pi r^2}{2}\cdot b = 1000\cdot 9{,}8\cdot 3{,}14\cdot 1^2\cdot 2\cdot 0{,}5 = 30770 \text{ N},$$

$$P_z = 30{,}77 \text{ kN}.$$

Alors, la force de pression totale sera:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{156{,}8^2 + 30{,}77^2} = 159 \text{ kN}.$$

L'inclinaison de la force P par rapport à l'horizontal est:

$$tg\beta = \frac{P_z}{P_x} = \frac{30{,}77}{156{,}80} = 0{,}196, \quad \beta = 11^\circ.$$

Comme la surface ACC est cylindrique la force P passe par le centre de courbure O'.

HYDRODYNAMIQUE

EQUATION DE BERNOULLI ET RESISTANCES HYDRAULIQUES

§1. Equation de Bernoulli

L'équation fondamentale de l'hydrodynamique est l'équation de Bernoulli, qui pour le mouvement permanent d'un liquide réel a la forme suivante:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f \, ; \qquad (1)$$

avec: z - hauteur de position,

$\frac{p}{\rho g}$ - hauteur piézométrique,

$\frac{\alpha v^2}{2g}$ - hauteur dynamique,

h_f - perte de la hauteur totale nécessaire pour vaincre les résistances hydrauliques entre les sections 1-1 et 2-2. (fig. 1).

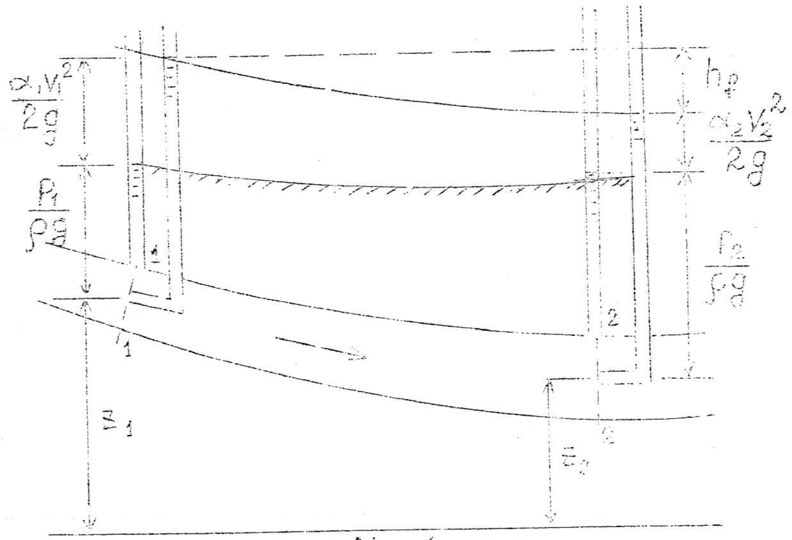


fig. 1.

Tous les termes de l'équation de Bernoulli ont l'unité de mesure de longueur.

La somme $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ est appelée hauteur totale.

Au point de vue physique cette somme représente l'énergie totale, rapportée à l'unité du poids du liquide, et est nommée <u>énergie spécifique de section</u>. Donc, h_f est une partie de l'énergie spécifique du liquide qui est nécessaire pour vaincre les résistances hydrauliques entre les sections considerées et est appelée <u>perte d'énergie</u> ou <u>perte de charge</u>.

Les vitesses moyennes des sections peuvent être déterminées par l'équation de continuité, qui pour le mouvement permanent a la forme suivante:

$$Q = \omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \ldots\ldots = \omega v = \text{const}, \qquad (2)$$

où Q - débit du courant,

ω - aire de la section.

Pour les calculs pratiques le coefficient α, qui tient compte de l'irrégularité de la répartition des vitesses dans une section, peut être consideré égal à 1,1, si le régime du mouvement est turbulent. Au cas où le régime du mouvement est laminaire $\alpha = 2$.

La pente de la ligne de charge est appelée <u>pente hydraulique</u>. Si la perte de charge sur la longueur du courant varie uniformément la pente hydraulique est constante et est égale:

$$i = \frac{h_f}{l} = \frac{1}{l}\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)\right]. \qquad (3)$$

La pente piézométrique est le rapport:

$$i_p = \frac{1}{l}\left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)\right]. \qquad (4)$$

Lors du mouvement uniforme (quand la vitesse moyenne ne varie pas le long du courant) la pente hydraulique et la pente piézométrique sont égales, c.à d. $i = i_p$.

§2. Régimes d'écoulement des liquides et calcul des pertes de charge

Les pertes de charge dependent considérablement du régime d'écoulement.

On distingue deux régimes d'écoulement des liquides: laminaire et turbulent.

Le régime d'écoulement peut être déterminé à l'aide du nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{4Rv}{\nu}, \qquad (5)$$

où Re - nombre de Reynolds sans dimension,

R - rayon hydraulique, qui est égal au rapport de l'aire d'écoulement par le périmètre mouillé:

$$R = \frac{\omega}{\chi},\qquad(6)$$

où χ périmètre mouillé de la section ω,

ν - coefficient de viscosité cinématique, qui depend de la température du liquide.

Pour un tube à section circulaire le nombre de Reynolds est:

$$Re = \frac{vd}{\nu};\qquad(7)$$

où d - diamètre du tube.

Après avoir déterminé le nombre de Reynolds, il faut le comparer avec le nombre critique de Reynolds, qui est égal à $Re_{cr} = 2320$.

Si $Re < Re_{cr}$ le régime d'écoulement est laminaire et

si $Re > Re_{cr}$ le régime d'écoulement est turbulent.

Pour l'application de l'équation de Bernoulli il est nécessaire de déterminer les pertes de charge. D'habitude on considère la perte de charge totale comme la somme des toutes les pertes de charge.

On distingue deux genres des pertes de charge:

perte de charge répartie ou perte de charge uniforme,

perte de charge locale.

Donc, $h_p = h_f + h_{loc}$; (8)

où h_p - perte de charge totale,

h_f - perte de charge répartie et

h_{loc} - perte de charge locale.

On détermine la perte de charge répartie par la formule de Darcy:

$$h_f = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g},\qquad(9)$$

où R - rayon hydraulique,

l - longueur du courant entre les sections considerées,

λ - coefficient de frottement.

Pour un tube à section circulaire la formule (9) prend la forme suivante:

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \qquad (10)$$

Pendant le mouvement laminaire le coefficient λ dépend uniquement du nombre de Reynolds. Cette dépendance a la forme suivante:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \qquad (11)$$

En remplaçant cette valeur de λ dans la formule (10) et en tenant compte la formule (7), on trouve :

$$h_f = \frac{32\nu}{g} \frac{l}{d^2} v. \qquad (12)$$

Donc, pendant le mouvement laminaire la perte de charge est proportionele à la vitesse moyenne du courant.

Le mouvement turbulent a deux régions et une zone de résistance hydraulique pour lesquelles λ est différent.

1. Région du mouvement turbulent lisse.

Cette région est caractérisée par la condition $\delta > \Delta$, où δ - épaisseur de la couche laminaire près de la paroi, Δ - hauteur moyenne de la rugosité.

Dans cette région la rugosité relative Δ/d n'a aucune influence sur le coefficient de frottement. λ dépend du nombre de Reynolds:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}. \qquad (13)$$

Pour les calculs pratiques on peut considérer un mouvement comme turbulent lisse, si

$$2320 < Re < 5 \cdot 10^4.$$

2. Zone de transition

Cette zone se caractérise par le fait que δ et Δ sont de même ordre. Le coefficient λ dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative Δ/d. Pour cette zone les valeurs de λ pevent être déterminer par la formule de Freinkel:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\Delta}{3,7d} + \left(\frac{6,81}{Re} \right)^{0,9} \right].$$

3. Région du mouvement turbulent rugueu

Cette région a lieu pour les valeurs élevées du nombre de Reynolds. Le coefficient λ cesse de dépendre du nombre Re et devient constant pour une rugosité relative.

Pour cette région de la résistance la perte de charge devient proportionele au carré de la vitesse et de ce fait elle est appelée simplement région cuadratique de la résistance.

Pour les résolutions des problèmes on peut recommender le tableau 3, où les valeurs de λ sont présentées en fonction du diamètre.

Formule de Chézy. Pour le calcul des pertes de charge dans des conduites longues et surtout dans des canals il est commode de se servir de la formule de Chézy, qui peut être présentée comme suite:

$$h_f = \frac{v^2 l}{C^2 R}, \qquad (14)$$

avec C - coefficient de Chézy.

Transformons cette formule comme suite:

$$h_f = \frac{\omega^2 v^2 l}{C^2 \omega^2 R},$$

et vu que $\omega v = Q$, en désignant $\omega C\sqrt{R} = K$, nous aurons:

$$h_f = \frac{Q^2}{K^2} l, \qquad (15)$$

où K - est appelé capacité de passage.

Pour un tuyau K est constant et de ce fait on peut présenter ses valeurs dans le tableau en fonction du diamètre (tableau N4).

En désignant $1/K^2 = S$, on a:

$$h_f = SQ^2 \qquad (16)$$

où S - est appelé résistance hydraulique du tuyau.

Perte de charge locale.

La formule générale de la détermination des pertes de charge locale est suivante:

$$h_{loc} = \xi \frac{v^2}{2g}, \qquad (17)$$

où ξ - coefficient de la résistance hydraulique locale.

Les formules de la détermination de ξ et ses valeurs pour les différentes résistances locales sont présentées dans l'appendice.

Problèmes résolus

§1. Equation de Bernoulli

Exemple 1. Sur une conduite en charge est installé le débimètre de Venturi.

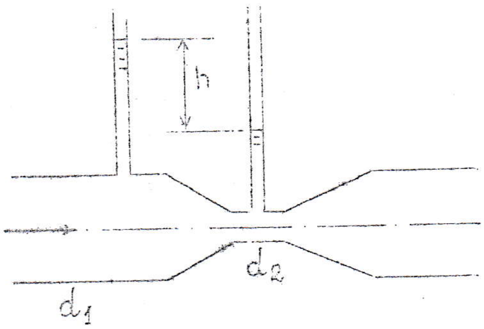


Fig. 2.

Déterminer le débit qui passe à travers la conduite, en négligeant les pertes de charge et la contraction du courant.

Application numérique
$h = 20\,cm$; $d_1 = 100\,mm$; $d_2 = 50\,mm$.

Solution

Ecrivons l'équation de Bernoulli pour les sections 1-1 et 2-2, en prenant comme plan de référence le plan, qui passe par l'axe du débimètre.

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g},$$

Vue que $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h$ et en prenant $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, on a:

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Selon l'équation de continuité (2) on éxprime les vitesses v_1 et v_2 par le débit:

$$v_1 = Q/\omega_1 \quad \text{et} \quad v_2 = Q/\omega_2.$$

Alors, $h = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)$, d'où $Q = \omega_2 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}$

Comme ω_1 et ω_2 sont constants pour un débimètre, alors la formule ci-dessus peut être écrite comme suite:

$$Q = A\sqrt{h},$$

où $A = \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}$ est appelé constant du débimètre.

En remplaçant les grandeurs par les chifres, on trouve:

$$A = \frac{3{,}14 \cdot 5^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 981}{1-\left(\frac{5}{10}\right)^2}} = 900\ cm^{2,5}/s \text{ et}$$

$$Q = 900\sqrt{20} = 4030\ cm^3/s; \quad \text{ou } Q = 4{,}03\ lit/s.$$