Université Badji Mokhtar, Annaba
Faculté des Sciences
Mathématiques et Informatique

T. C. M. I.
Semestre 2
2018/2019

Corrigé EMD

Exercice 1.

1. La population étudiée est : les 50 jours d'interventions à domicile.

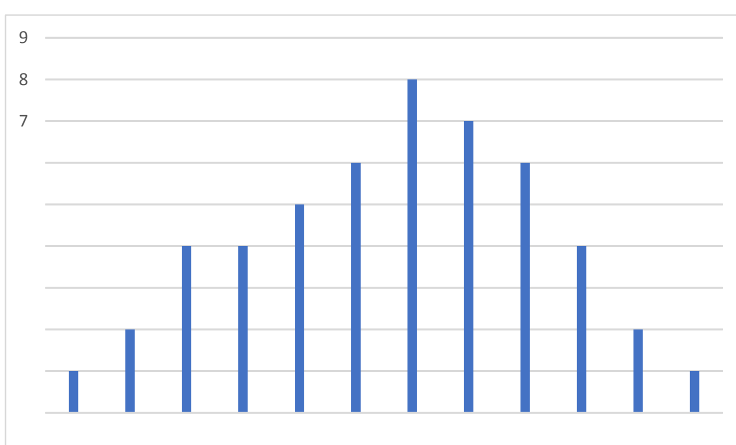
   Le caractère étudié : Le nombre d'interventions.

   Nature du caractère : quantitatif discret.

2.

# interventions x_i	# de jours n_i	Pourcentage %	$n_i \uparrow$	$n_i \downarrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
14	1	2	1	50	14	196
15	2	4	3	49	30	450
16	4	8	7	47	64	1024
17	4	8	11	43	68	1156
18	5	10	16	39	90	1620
19	6	12	22	34	114	2166
20	8	16	30	28	160	3200
21	7	14	37	20	147	3087
22	6	12	43	13	132	2904
23	4	8	47	7	92	2116
24	2	4	49	3	48	1152
25	1	2	50	1	25	625
Total	50	100	-	-	984	19696

3. Diagramme en bâtons



4. La moyenne :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{12} n_i x_i = \frac{984}{50} = 19,68.$$

Le mode : $Mo = 20$ qui a l'effectif le plus élevé.

La médiane : $n = 50 = 2 \times 25$ d'où $p = 25$ alors $Me = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_{25}+x_{26}}{2} = \frac{20+20}{2} \Longrightarrow Me = 20.$

5. L'écart-type est σ_X, on a

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{12} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{19696}{50} - 19,68^2 = 6,6176.$$

alors $\sigma_X = \sqrt{6,6176} \simeq 2,5725.$

L'écart interquartile : On a $n' = \frac{n}{2} = 25 = 2 \times 12 + 1 \Longrightarrow p' = 12$ d'où $Q_1 = x_{p'+1} = x_{13} = 18$

et $Q_3 = x_{p+p'+1} = x_{38} = 22.$

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 = 22 - 18 \\ IQR &= 4. \end{aligned}$$

Le coefficient de variation :

$$\begin{aligned} CV_X &= \frac{\sigma_X}{\overline{X}}100 = \frac{2,5725}{19,68}100 \\ CV_X &\simeq 13,07\%. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. La population étudiée est : les 100 relevés des durées de communications téléphoniques.

   Le caractère étudié : La durée des appels téléphoniques.

   Nature du caractère : quantitatif continu.

2.

Durée	$[0,2[$	$[2,4[$	$[4,6[$	$[6,8[$	$[8,10[$	$[10,12[$	$[12,14[$	Total
Centre n_i	1	3	5	7	9	11	13	–
Effectif x_i	14	16	25	15	12	10	8	100
Fréquence	$0,14$	$0,16$	$0,25$	$0,15$	$0,12$	$0,10$	$0,08$	1
$n_i \uparrow$	14	30	55	70	82	92	100	–
$n_i x_i$	14	48	125	105	108	110	104	614
$n_i x_i^2$	14	144	625	735	972	1210	1352	5052

3. La moyenne :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = \frac{614}{100} = 6,14\,\text{min}\,.$$

Le mode : la classe modale est la classe qui a l'effectif le plus élevé c'est à dire $[4,6[$ d'où le mode est $Mo = 5\,\text{min}$ qui a l'effectif le plus élevé.

La médiane : $\frac{n}{2} = 50 \Longrightarrow Me \in [4,6[$ et elle est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{Me-4}{6-4} &= \frac{50-30}{55-30}\\ &\Longrightarrow Me = \frac{20}{25}2+4\\ &\Longrightarrow Me = 5,6\,\text{min}\,.\end{aligned}$$

4. L'écart-type est σ_X, on a

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{5052}{100} - 6,14^2 = 12,8204.$$

alors $\sigma_X = \sqrt{12,8204} \simeq 3,5806\,\text{min}\,.$

Les quartiles : on a $\frac{n}{4} = 25$ alors le premier quartile $Q_1 \in [2,4[$ et il est donné par

$$\begin{aligned}\frac{Q_1-2}{4-2} &= \frac{25-14}{30-14}\\ &\Longrightarrow Q_1 = \frac{11}{16}2+2\\ &\Longrightarrow Q_1 = 3,375\,\text{min}\,.\end{aligned}$$

On a $\frac{3n}{4} = 75$ alors le troisième quartile $Q_3 \in [8,10[$ et il est donné par

$$\begin{aligned}\frac{Q_3-8}{10-8} &= \frac{75-70}{82-70}\\ &\Longrightarrow Q_3 = \frac{5}{12}2+8\\ &\Longrightarrow Q_3 \simeq 8,833\,\text{min}\,.\end{aligned}$$

4. Le coefficient de variation est

$$\begin{aligned}CV_X &= \frac{\sigma_X}{\overline{X}}100 = \frac{3,5806}{6,14}100\\ CV_X &\simeq 58,32\%.\end{aligned}$$

5. $25\% < CV_X < 80\%$ alors on peut dire que les durées des appels sont assez dispersées autour de $\overline{X}$.

Exercice 3.

On complète le tableau pour faciliter le calcul des différentes caractéristiques

$X \quad \backslash Y$	30	40	50	60	70	$n_{i\cdot}$	$n_{i\cdot}x_i$	$n_{i\cdot}x_i^2$
8					**4**	4	32	256
12			**1**	**3**		4	48	576
16		**2**	**6**			8	128	2048
20	**3**	**1**				4	80	1600
$n_{\cdot j}$	3	3	7	3	4	20	**288**	**4480**
$n_{\cdot j}y_j$	90	120	350	180	280	**1020**		
$n_{\cdot j}y_j^2$	2700	4800	17500	10800	19600	**55400**		
$n_{ij}x_iy_j$	**1800**	**2080**	**5400**	**2160**	**2240**	13680		

1. Moyenne de X

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_{i\cdot}x_i = \frac{288}{20} = 14,4.$$

Variance de X

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4} n_{i\cdot}x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{4480}{20} - 14,4^2 = 16,64;$$

Moyenne de Y

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} n_{\cdot j}y_j = \frac{1020}{20} = 51.$$

Variance de Y

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{20}\sum_{j=1}^{5} n_{\cdot j}y_j^2 - \overline{Y}^2 = \frac{55400}{20} - 51^2 = 169;$$

2. Covariance

$$Cov\,(X,Y) = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} n_{ij}x_iy_j - \overline{XY} = \frac{13680}{20} - 14,4 \cdot 51 = -50,4.$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
$$\sigma_X = \sqrt{16,64} \simeq 4,0792 \text{ et } \sigma_Y = \sqrt{169} = 13;$$

d'où

$$\rho(X,Y) = \frac{-50,4}{4,0792 \cdot 13} \simeq -0,9504.$$

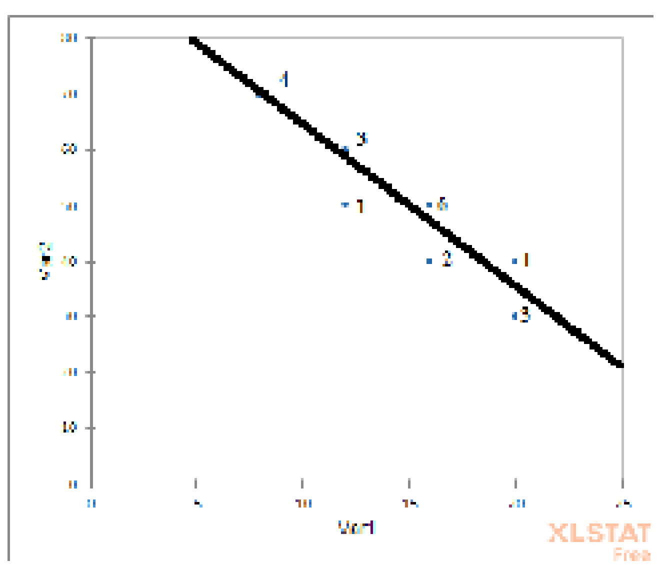
3. Droite de régression de Y en X

$$Y = aX + b \text{ où } a = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$
$$a = \frac{-50,4}{16,64} \simeq -3,0288;$$
$$b = 51 + 3,0288 \cdot 14,4 \simeq 94,61.$$

D'où

$$Y = -3,0288 \cdot X + 94,61.$$

4.



Comme $\rho < 0$ le nombre de buts encaissés et le nombre de parties gagnées évoluent dans le sens contraire et étant donné que $\rho^2(X,Y) = 0,9033 > 0,9$ alors on peut dire qu'il y a une forte corrélation entre les deux variables et elle est caractérisée par une relation linéaire.

Exercice 3. (Etudiants en L2 avec dettes)

1. On a $Card\,(\Omega) = C_{10}^4$. Alors la probabilité d'obtenir 2 blanches et 2 noires est

$$\mathbb{P}\,(2B2N) = \frac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4} = \frac{\frac{7\cdot 6}{2}3}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{7\cdot 3\cdot 3}{10\cdot 3\cdot 7}$$
$$= \frac{3}{10} = 0,30.$$

2. La probabilité d'obtenir au moins 2 boules noires

$$\mathbb{P}\,(2B2N) + \mathbb{P}\,(1B3N) = \frac{C_7^2 C_3^2}{C_{10}^4} + \frac{C_7^1 C_3^3}{C_{10}^4} = \frac{3}{10} + \frac{7\cdot 1}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}}$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{10}{30} \simeq 0,33.$$

3. La probabilité d'obtenir 2 blanches et 2 noires sachant que l'une des 4 boules est noire

$$\mathbb{P}\,(2B2N\,|1N\,) = \frac{\mathbb{P}\,(2B2N)}{\mathbb{P}\,(1N)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{C_7^3 C_3^1}{C_{10}^4}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}3}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}}} = \frac{3}{10}\,\frac{10\cdot 3\cdot 7}{7\cdot 5\cdot 3}$$
$$= \frac{3}{5} = 0,60.$$