Module : Analyse fonctionnelle appliquée *mars* 2020
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Réponses Série 2
Espaces de Sobolev

Excercice 1.
Réponse : $f \in H^1(0,1) \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

Excercice 3.

- 1- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = -\beta x_i |x|^{-\beta-2}$, $|\nabla u|^2 = \beta^2 |x|^{-2(1+\beta)}$
- 2- $\displaystyle\int_B |\nabla u|^2 dx = \beta^2 mes(S^{N-1}) \int_0^1 \frac{1}{r^{2(1+\beta)}} r^{N-1} dr$
  cette intégrale converge si et seulement si $\beta < \frac{N}{2} - 1$. Donc $u \in H^1(\Omega)$ si $\beta < \frac{N}{2} - 1$.

Excercice 5.
- u_1 et continue et C^1 par morçeaux, $u_1' = -\chi_{[1,2]}$, donc $u_1 \in H^1(]0,2[)$.
- $u_2 \in H^1(]0,2[)$ si et seulement si u_2 est continue en $x = 1 \Leftrightarrow a = b$.

Excercice 6.
Par définition la dérivée faible $g_i = D_i u$ de u est définie par le crochet de dualité

$$
\begin{aligned}
\forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \quad < g_i, \varphi > \; &= -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \\
&= -\int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\
&= \int_{\Omega_1} \varphi \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_2} \varphi \frac{\partial u_2}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma (u_2 - u_1) \varphi n_i ds \\
&= \int_{\Omega_1} \varphi \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_2} \varphi \frac{\partial u_2}{\partial x_i} dx \quad \text{car } u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma
\end{aligned}
$$

d'où

$$D_i u = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \chi_{\Omega_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \chi_{\Omega_2}$$

donc $D_i u \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$.

Excercice 6. L'équivalence découle de la formule de Green

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v ds \quad \text{pour toute fonction } v \in C^1(\bar{\Omega})$$

Si on pose $v = 0$ dans l'équation variationnelle, on obtient la condition nécessaire d'existence

$$\int_\Omega f(x) dx = 0.$$