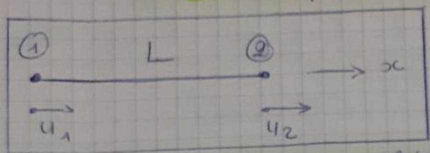
Exemple 1 : Fonctions de forme pour un élément fini 1D à deux noeuds et 1DDL par noeud.



noeud ① : 1 DDL (translation selon (x)) = u_1

noeud ② : 1 DDL (" " ") = u_2

→ le champ de déplacement approximé s'écrit sous la forme : $u(x) = [N] \cdot \{q_e\}$

et aussi : $u(x) = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

→ [N] est une fonction polynomiale (de forme ou d'interpollation) sous la forme : $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$

↳ le nombre de monomes = nb ddl/élément

2 noeuds et 1DDL par noeud → 2ddl par élément

→ pour déterminer les valeurs de (α_0) et (α_1) il faut utiliser les conditions aux limites :

noeud ① : $x = 0 \rightarrow u(0) = u_1 = \alpha_0 + \alpha_1(0)$

donc $\alpha_0 = u_1$

noeud ② : $x = L \rightarrow u(L) = u_2 = \alpha_0 + \alpha_1 L$

donc : $\alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$

→ le champ de déplacement approximé devient : $u(x) = \underbrace{u_1}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{u_2 - u_1}{L}}_{\alpha_1} x$

→ on veut écrire le champ de déplacement approximé sous la forme :

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2$$

à partir de la forme du champ $u(x)$

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

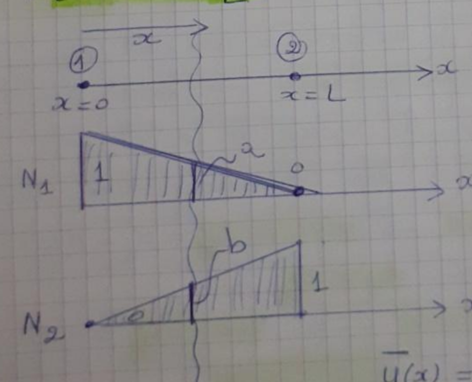
et après simplifications :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2$$

→ on obtient les deux fonctions de forme de l'élément (1D) avec $\begin{cases} \text{2 noeuds} \\ \text{et 1DDL/noeud} \end{cases}$

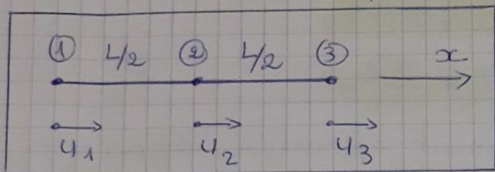
$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$



$\bar{u}(x) = a \cdot N_1 + b \cdot N_2$

Exemple 2 : Fonctions de forme pour un élément (1D) à trois noeuds et 1DDL par noeud.



noeud (1) → 1DDL → u_1

noeud (2) → 1 DDL → u_2

noeud (3) → 1 DDL → u_3

→ l'expression du champ de déplacement approximé :

$$u(x) = [N]\{q_e\}$$

il peut aussi prendre la forme : $u(x) = [N]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}$

→ [N] fonction polynomiale de forme

sous la forme : $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$

↳ nbr de monomes = nbr de ddl / élément

3 noeuds et 1DDL par noeud → 3 DDL par élément

→ Pour trouver les valeurs de (α_0), (α_1) et (α_2) :

Conditions aux limites :

noeud (1) : $x = 0$ → $u(0) = u_1 = \alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)$

noeud (2) : $x = L/2$ → $u(L/2) = u_2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{L}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{L}{2}\right)^2$

noeud (3) : $x = L$ → $u(L) = u_3 = \alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2$

→ après résoudre le système d'équations (nbr d'équatio[ns] égal au nbr d'inconnus)

on peut déterminer les valeurs de α_0, α_1 et α_2 :

$$\alpha_0 = u_1$$

$$\alpha_1 = -\frac{3}{L}u_1 + \frac{4}{L}u_2 - \frac{1}{L}u_3$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{L^2}u_1 - \frac{4}{L^2}u_2 + \frac{2}{L^2}u_3$$

le champ de déplacement approximé devient :

$$u(x) = u_1 + \left(\frac{-3}{L}u_1 + \frac{4}{L}u_2 - \frac{1}{L}u_3\right)x + \left(\frac{2}{L^2}u_1 - \frac{4}{L^2}u_2 + \frac{2}{L^2}u_3\right)x^2$$

Après simplification on obtient la forme :

$$u(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2 + N_3(x).u_3$$

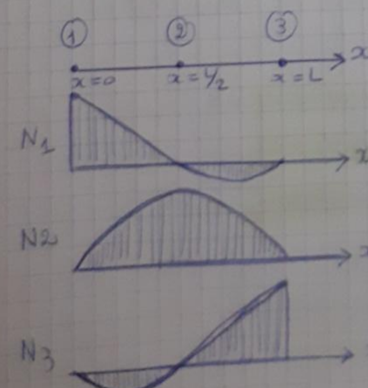
$$u(x) = \left(1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2\right)u_1 + \left(\frac{4}{L}x - \frac{4}{L^2}x^2\right)u_2 + \left(\frac{-1}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2\right)u_3$$

les trois fonctions de forme seront :

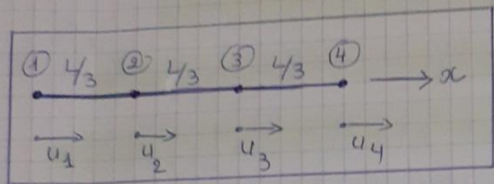
$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2$$

$$N_2(x) = \frac{4}{L}x - \frac{4}{L^2}x^2$$

$$N_3(x) = \frac{-1}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2$$



Exemple 3 : Fonctions de forme pour un élément (1D) à quatre noeuds et 1DDL par noeud.



noeud (1) → 1DDL → u_1

noeud (2) → 1DDL → u_2

noeud (3) → 1DDL → u_3

noeud (4) → 1DDL → u_4

→ L'expression du champ de déplacement approximé : $u(x) = [N]\{q_e\}$

$$u(x) = [N]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

→ [N] fonction polynomiale de forme

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

↳ le nombre de monomes = nbr DDL par élément

4 noeud et 1 DDL par noeud ⟶ 4 DDL par élément

→ Détermination de α_0, α_1, α_2 et α_3 : à partir des conditions aux limites

noeud (1) : $x=0 \rightarrow u(0) = \alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) = u_1$

noeud (2) : $x = L/3 \rightarrow u(L/3) = \alpha_0 + \alpha_1(L/3) + \alpha_2(L/3)^2 + \alpha_3(L/3)^3 = u_2$

noeud (3) : $x = 2L/3 \rightarrow u(2L/3) = \alpha_0 + \alpha_1(2L/3) + \alpha_2(2L/3)^2 + \alpha_3(2L/3)^3 = u_3$

noeud (4) : $x = L \rightarrow u(L) = \alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2 + \alpha_3(L)^3 = u_4$

→ La résolution de quatre équations avec quatre inconnus $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on trouve :

$$\alpha_0 = u_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-11}{2L} u_1 + \frac{9}{L} u_2 - \frac{9}{2L} u_3 + \frac{1}{L} u_4$$

$$\alpha_2 = \frac{9}{L^2} u_1 + \frac{45}{2L^2} u_2 + \frac{18}{L^2} u_3 + \frac{9}{2L^2} u_4$$

$$\alpha_3 = \frac{-9}{2L^3} u_1 + \frac{27}{2L^3} u_2 + \frac{27}{2L^3} u_3 + \frac{9}{2L^3} u_4$$

→ Le champ de déplacement approximé devient :

$$u(x) = u_1 + \left(\frac{-11}{2L} u_1 + \frac{9}{L} u_2 - \frac{9}{2L} u_3 + \frac{1}{L} u_4\right) x + \left(\frac{9}{L^2} u_1 + \frac{45}{2L^2} u_2 + \frac{18}{L^2} u_3 + \frac{9}{2L^2} u_4\right) x^2 + \left(\frac{-9}{2L^3} u_1 + \frac{27}{2L^3} u_2 + \frac{27}{2L^3} u_3 + \frac{9}{2L^3}\right) x^3$$

→ Pour obtenir la forme :

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 + N_3(x) \cdot u_3 + N_4(x) \cdot u_4$$

on doit simplifier :

$$u(x) = \left(1 - \frac{11x}{2L} + \frac{9x^2}{L^2} - \frac{9x^3}{2L^3}\right) u_1 + \left(\frac{9x}{L} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{27x^3}{2L^3}\right) u_2 + \left(-\frac{9x}{2L} + \frac{18x^2}{L^2} - \frac{27x^3}{2L^3}\right) u_3 + \left(\frac{x}{L} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{9x^3}{2L^3}\right) u_4$$

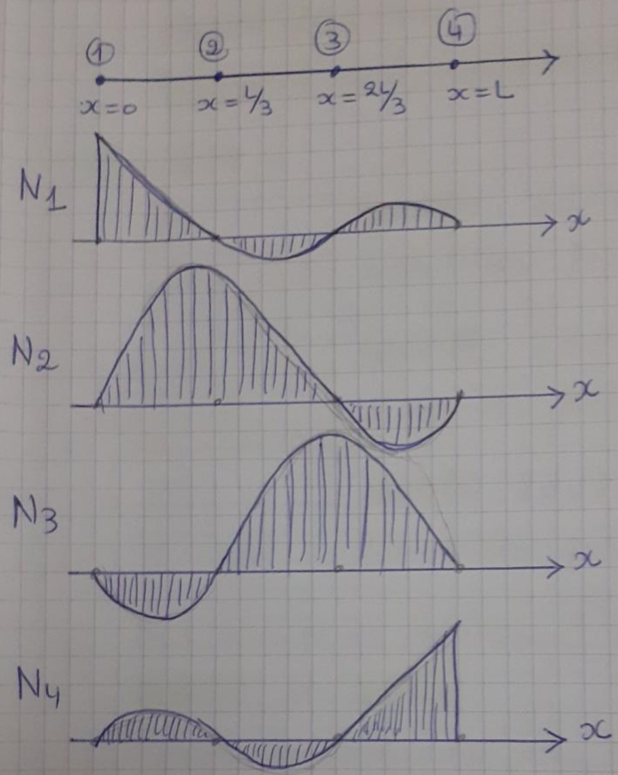
→ Les quatre fonctions de forme sont :

$$N_1(x) = 1 - \frac{11x}{L} + \frac{9x^2}{L^2} - \frac{9x^3}{2L^3}$$

$$N_2(x) = \frac{9x}{L} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{27x^3}{2L^3}$$

$$N_3(x) = \frac{-9x}{2L} + \frac{18x^2}{L^2} - \frac{27x^3}{2L^3}$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{9x^3}{2L^3}$$



1
2
3
4
x=0
x=L/3
x=2L/3
x=L
N1
N2
N3
N4
x
x
x
x