T.D Chapitre 2

(Abscisse Curviligne)

Exercice 1: Soit (Γ, M) la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (r\cos t, r\sin t, ht), \quad t \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_+^*,\ h \in \mathbb{R}^*.$$

1) Déterminer l'ensemble des points réguliers de $\Gamma = M(\mathbb{R})$.
2) Calculer l'abscisse curviligne de (Γ, M) en prenant $t_0 = 0$.
3) Déterminer la reparamétrisation $\widetilde{M}$ par cette abscisse curviligne.
4) Calculer la courbure et le rayon de courbure en un point quelconque de Γ, en utilisant la paramétrisation $\widetilde{M}$ et ensuite la paramétrisation M.
5) Déterminer le vecteur normal principal et le centre de courbure en un point quelconque de Γ.
6) Calculer la torsion en un point quelconque de Γ (par rapport à la paramétrisation $\widetilde{M}$ et ensuite par rapport à la paramétrisation M).
7) Calculer la longueur de l'arc de Γ pris entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$.

Solution :

1) $\overrightarrow{M'(t)} = (-r\sin t,\ r\cos t, h)$. Comme $h \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{M'(t)} \neq \vec{0}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est régulier.

2) Abscisse curviligne

$$s = S(t) = \int_0^t \left\|\overrightarrow{M'(\tau)}\right\| d\tau = \int_0^t \sqrt{r^2+h^2}\, d\tau = \sqrt{r^2+h^2}.t \quad (J = Im(S) = \mathbb{R}).$$

3) L'ensemble des t, pour lesquelles $M(t)$ est régulier, est $\mathbb{R}$ tout entier. Il suffit que cet ensemble soit dense dans $\mathbb{R}$ pour qu'on puisse reparamétriser Γ par une abscisse curviligne (proposition 1.1 chapitre 2). On a donc:

$$t = S^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} \implies \widetilde{M}(s) = (M \circ S^{-1})(s) = M\big(S^{-1}(s)\big) = M\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$

$$= \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{r^2+h^2}}\right).$$

4) Par définition, la courbure en un point quelconque de Γ est égale à :

$$\rho(s) = \left\|\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s)\right\| \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{T(s)} = \frac{\overrightarrow{d\widetilde{M}}}{ds}(s),$$

$\overrightarrow{T(s)}$ est un vecteur unitaire tangent à $\Gamma = \widetilde{M}(\mathbb{R}) = M(\mathbb{R})$ au point $\widetilde{M}(s) = M(t)$.

Pour notre courbe Γ, on a :

$$\overrightarrow{T(s)} = \frac{\overrightarrow{d\widetilde{M}}}{ds}(s) = \left(-\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}},\ \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}},\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right),$$

$$\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s) = \left(-\frac{r}{r^2+h^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, -\frac{r}{r^2+h^2}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, 0\right).$$

La courbure en un point quelconque de Γ est alors égale à :

$$\rho(s) = \left\|\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s)\right\| = \sqrt{\frac{r^2}{(r^2+h^2)^2}} = \left|\frac{r}{r^2+h^2}\right| = \frac{r}{r^2+h^2}\ (>0).$$

On en déduit que la courbure de Γ en chacun de ses points est non nulle. Ceci équivaut, par la proposition 2.1 du chapitre 2, que tous les points de Γ sont biréguliers.

<u>Rayon de courbure :</u>

$$R(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \frac{r^2+h^2}{r}\cdot$$

Calculons la courbure en un point quelconque de Γ en utilisant son expression par rapport à un paramètre quelconque (évidemment on va retrouver la même formule ci-dessus de la courbure).

$$\rho(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3},$$

$\overrightarrow{M'(t)} = (-r\sin t, r\cos t, h)$, $\overrightarrow{M''(t)} = (-r\cos t, -r\sin t, 0)$, d'où

$$\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -r\sin t & r\cos t & h \\ -r\cos t & -r\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \big((r\cos t).0 + hr\sin t\big)\vec{\imath} + (-hr\cos t - 0(-r\sin t))\vec{\jmath} + (r^2 sin^2 t + r^2 cos^2 t)\vec{k}$$

$$= (hr\sin t)\vec{\imath} + (-hr\cos t)\vec{\jmath} + r^2\vec{k}.$$

$$\left\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\right\| = \sqrt{h^2r^2sin^2t + h^2r^2cos^2t + r^4} = \sqrt{h^2r^2 + r^4} = r\sqrt{h^2+r^2},$$

$\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| = \sqrt{r^2sin^2t + r^2cos^2t + h^2} = \sqrt{r^2 + h^2}.$

Finalement

$$\rho(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3} = \frac{r\sqrt{h^2 + r^2}}{\left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^3} = \frac{r}{r^2 + h^2} \cdot$$

5) Vecteur normal principal et centre de courbure :

$$\overrightarrow{N(s)} \overset{déf}{=} \frac{1}{\rho(s)}\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s) = R(s)\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}(s)$$

$$= \frac{r^2 + h^2}{r}\left(-\frac{r}{r^2 + h^2}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\frac{r}{r^2 + h^2}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0\right)$$

$$= \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0\right).$$

Il est facile de vérifier que $\left\|\overrightarrow{N(s)}\right\| = 1$ et on peut remarquer que le vecteur normal principal $\overrightarrow{N(s)}$, en un point quelconque $\widetilde{M}(s)$ de Γ, est dans le plan horizontal passant par ce point.

L'équation qui définit le centre de courbure en un point quelconque $\widetilde{M}(s)$ de Γ est la suivante :

$$\overrightarrow{\widetilde{M}(s)C(s)} = R(s)\overrightarrow{N(s)} \iff \overrightarrow{OC(s)} = \overrightarrow{O\widetilde{M}(s)} + R(s)\overrightarrow{N(s)} \implies$$

$$C(s) = \left(r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right)$$

$$+ \frac{r^2 + h^2}{r}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0\right)$$

$$= \left(-\frac{h^2}{r}\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\frac{h^2}{r}\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right).$$

L'application $s \in J = \mathbb{R} \longrightarrow C(s) \in \mathbb{R}^3$, qui donne les centres de courbure de Γ, définit une courbe paramétrée et son image $\Gamma_D = C(\mathbb{R})$ est appelée *la développée de la courbe* Γ.

Par exemple,

- si $t = 0 \iff s = 0$, alors $C(0) = \left(-\frac{h^2}{r}, 0, 0\right)$
- si $t = \frac{\pi}{2} \iff s = \frac{\pi}{2}\sqrt{r^2 + h^2}$, alors $C\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{r^2 + h^2}\right) = \left(0, -\frac{h^2}{r}, h\frac{\pi}{2}\right).$

Ceci nous permet de voir que la développée de Γ n'est pas sur l'axe Oz.

On peut le voir aussi en prenant par exemple $r = 1$ et $h = 0.5$, on aura : $\overrightarrow{\widetilde{M}(s)C(s)} = 1.25\overrightarrow{N(s)}$.

6) Calcul de la torsion en un point quelconque de Γ (par rapport au paramètre s) :

$$\tau(s) \overset{déf}{=} \overrightarrow{B(s)} \cdot \frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) \cdot$$

Calcul du vecteur binormal $\overrightarrow{B(s)}$:

$$\overrightarrow{B(s)} \overset{déf}{=} \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} & \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} \right) \vec{\imath} + \left(-\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \right) \vec{k}$$

$$\frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, -\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, 0 \right).$$

$$\tau(s) = \overrightarrow{B(s)} \cdot \frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) = \frac{h}{r^2+h^2} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{h}{r^2+h^2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{h}{r^2+h^2} \cdot$$

Calcul de la torsion en un point quelconque de Γ (par rapport à un paramètre quelconque t) :

$$\tau(t) = \frac{\left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)} \right)}{\left\| \overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} \right\|^2} = \frac{\overrightarrow{M'(t)} \cdot \left(\overrightarrow{M''(t)} \wedge \overrightarrow{M'''(t)} \right)}{\left\| \overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} \right\|^2} = \frac{det \left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)} \right)}{\left\| \overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} \right\|^2},$$

où $\left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}, \overrightarrow{M'''(t)} \right)$ est le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{M'(t)}$, $\overrightarrow{M''(t)}$ et $\overrightarrow{M'''(t)}$.

$\overrightarrow{M'(t)} = (-r \sin t, r \cos t, h)$

$\overrightarrow{M''(t)} = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$

$\overrightarrow{M'''(t)} = (r \sin t, -r \cos t, 0)$

$$det\left(\overrightarrow{M'(t)},\overrightarrow{M''(t)},\overrightarrow{M'''(t)}\right)=\begin{vmatrix}-r\sin t & r\cos t & h\\ -r\cos t & -r\sin t & 0\\ r\sin t & -r\cos t & 0\end{vmatrix}=h\begin{vmatrix}-r\cos t & -r\sin t\\ r\sin t & -r\cos t\end{vmatrix}$$

$$=h(r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t)=r^2h.$$

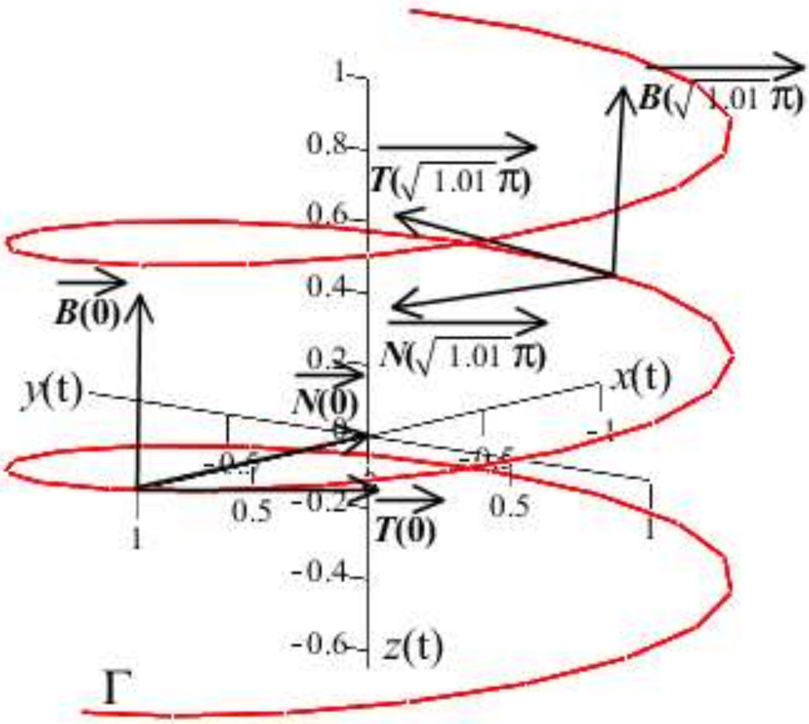
$$\overrightarrow{M'(t)}\wedge\overrightarrow{M''(t)}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -r\sin t & r\cos t & h\\ -r\cos t & -r\sin t & 0\end{vmatrix}=(hr\sin t)\vec{\imath}+(-hr\cos t)\vec{\jmath}+r^2\vec{k}.$$

$$\left\|\overrightarrow{M'(t)}\wedge\overrightarrow{M''(t)}\right\|^2=r^2(h^2+r^2).$$

Finalement

$$\tau(t)=\frac{r^2h}{r^2(h^2+r^2)}=\frac{h}{h^2+r^2}\,.$$

Remarque : Si $h<0$ (donc $\tau(t)<0$), la coordonnée $z(t)$ d'un point $M(t)$ parcourant la courbe Γ, qui est une hélice, décroît avec t. Inversement, si $h>0$ (donc $\tau(t)>0$), la coordonnée $z(t)$ d'un point $M(t)$ parcourant la courbe Γ croît avec t.



$r=1,\ h=0.1$

7) Longueur de l'arc de Γ pris entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$:

Par définition cette longueur est égale à :

$$l = \int_0^{2\pi} \left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+h^2}\, dt = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}.$$

La longueur d'un arc d'une courbe Γ est indépendante de la paramétrisation de cette courbe (ceci a été vu en cours).

En effet, si on calcule la longueur de cet arc, en utilisant la reparamétrisation par l'abscisse curviligne, on obtient :

pour $t = 0 \implies s = 0$,

pour $t = 2\pi \implies s = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}$,

$$l = \int_0^{2\pi\sqrt{r^2+h^2}} \left\|\overrightarrow{\widetilde{M}'(s)}\right\| ds = \int_0^{2\pi\sqrt{r^2+h^2}} \left\|\overrightarrow{T(s)}\right\| ds = \int_0^{2\pi\sqrt{r^2+h^2}} 1\, ds = 2\pi\sqrt{r^2+h^2}.$$

Exercice 2: Soit (Γ, M) la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) = \big(x(t),\ y(t)\big) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right), \quad DomM = \mathbb{R}.$$

1) Calculer la longueur de cette courbe.

2) Calculer la courbure de Γ au point $M(1)$.

Solution :

1) $M'(t) = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\ ,\ \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right)$, donc $\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| = \sqrt{\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2+1)^4}} = \frac{2}{t^2+1}$.

La longueur de Γ est égale à :

$$l = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{t^2+1} dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = 4Arctg(t)|_0^{+\infty} =$$

$$= 4 \lim_{a\to+\infty} Arctg(t)|_0^a = 4\left(\lim_{a\to+\infty} Arctg(a) - Arctg(0)\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi.$$

2) Par définition, la courbure de Γ en un point quelconque $M(t)$ est égale à :

$$\rho(t) = \frac{\left|det\left(\overrightarrow{M'(t)}, \overrightarrow{M''(t)}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3}.$$

$$\overrightarrow{M'(t)} = \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\ ,\ \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M'(1)} = (-1,0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{M'(1)}\right\| = 1.$$

$$\overrightarrow{M''(t)} = \left(\frac{12t^2-4}{(1+t^2)^3}\ ,\ \frac{4t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M''(1)} = (1,-1).$$

$$\left|det\left(\overrightarrow{M'(1)},\overrightarrow{M''(1)}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = 1.$$

Par conséquent, la courbure de Γ au point $M(1)$ égale à :

$$\rho(1) = \frac{\left|det\left(\overrightarrow{M'(1)},\overrightarrow{M''(1)}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{M'(1)}\right\|^3} = \frac{1}{1^3} = 1.$$

Exercice 3: Soit la courbe paramétrée (Γ, M) définie par

$$M(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(2t)\ ,\ \ \cos(2t)\ ,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2t)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1) Justifier que l'on peut reparamétriser (Γ, M) par une abscisse curviligne et déterminer cette reparamétrisation $s \to \widetilde{M}(s)$ de Γ.
2) En un point quelconque de Γ, calculer la courbure ρ (par rapport à la paramétrisation $\widetilde{M}$ et par rapport à la paramétrisation M).
3) En un point quelconque de Γ, déterminer le vecteur normal principal $\overrightarrow{N(s)}$, le vecteur binormal $\overrightarrow{B(s)}$ et calculer la torsion $\tau(s)$.

Solution :

1) $M'(t) = \left(\cos(2t), -2\sin(2t)\ ,\ \sqrt{3}\cos(2t)\right) \neq (0,0,0)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on peut reparamétriser Γ par une abscisse curviligne (proposition 1.1, chapitre 2).

Déterminons l'abscisse curviligne en choisissant $t_0 = 0$.

$\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| = \sqrt{\cos^2(2t) + 4\sin^2(2t) + 3\cos^2(2t)} = 2$. Ceci implique que

$s = S(t) = \int_0^t \left\|\overrightarrow{M'(\tau)}\right\| d\tau = \int_0^t 2d\tau = 2t$ et $t = S^{-1}(s) = \frac{s}{2}$.

Déterminons la reparamétrisation de Γ par cette abscisse curviligne.

$$\widetilde{M}(s) = (M \circ S^{-1})(s) = M\left(S^{-1}(s)\right) = M\left(\frac{s}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\sin(s)\ ,\ \ \cos(s)\ ,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s)\right).$$

2) i) Calcul de la courbure en un point quelconque de Γ (par rapport au paramètre s) :

$$\overrightarrow{T(s)} = \overrightarrow{\widetilde{M}'(s)} = \left(\frac{1}{2}\cos(s)\ ,\ \ -\sin(s)\ ,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s)\right).$$

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \left(-\frac{1}{2}\sin(s)\,, -\cos(s)\ \ , -\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s)\right).$$

$$\rho(s) = \left\|\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2(s) + \cos^2(s) + \frac{3}{4}\sin^2(s)} = 1.$$

ii) Calcul de la courbure en un point quelconque de Γ (par rapport au paramètre t) :

$$\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos(2t) & -2\sin(2t) & \sqrt{3}\cos(2t) \\ -2\sin(2t) & -4\cos(2t) & -2\sqrt{3}\sin(2t) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(4\sqrt{3}\sin^2(2t) + 4\sqrt{3}\cos^2(2t)\right)\vec{\imath} + \left(-2\sqrt{3}\cos(2t)\sin(2t) + 2\sqrt{3}\cos(2t)\sin(2t)\right)\vec{\jmath}$$

$$+ (-4\cos^2(2t) - 4\sin^2(2t))\vec{k} = 4\sqrt{3}\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} - 4\vec{k}.$$

Ainsi

$$\left\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\right\| = \sqrt{48 + 0 + 16} = 8$$

et on a déjà trouvé $\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\| = 2$. Par conséquent

$$\rho(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{M'(t)} \wedge \overrightarrow{M''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{M'(t)}\right\|^3} = \frac{8}{2^3} = 1.$$

3) i) Calcul du vecteur normal principal $\overrightarrow{N(s)}$ en un point quelconque de Γ:

$$\overrightarrow{N(s)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\rho(s)}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \frac{1}{1}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(s) = \left(-\frac{1}{2}\sin(s)\,, -\cos(s)\ \ , -\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s)\right).$$

ii) Calcul du vecteur binormal $\overrightarrow{B(s)}$ en un point quelconque de Γ:

$$\overrightarrow{B(s)} \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{T(s)} \wedge \overrightarrow{N(s)} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{1}{2}\cos(s) & -\sin(s) & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s) \\ -\frac{1}{2}\sin(s) & -\cos(s) & -\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(s) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(s)\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos(s)\sin(s) + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(s)\sin(s)\right)\vec{\jmath}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}\cos^2(s) - \frac{1}{2}\sin^2(s)\right)\vec{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} - \frac{1}{2}\vec{k}.$$

iii) Calcul de la torsion $\tau(s)$ en un point quelconque de Γ.

$$\tau(s) \overset{déf}{=} \overrightarrow{B(s)} \cdot \frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) \cdot$$

$$\frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos(s), \quad \sin(s), \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s)\right).$$

Par conséquent, la torsion $\tau(s)$ en un point quelconque de Γ est égale à :

$$\tau(s) \overset{déf}{=} \overrightarrow{B(s)} \,.\, \frac{\overrightarrow{dN}}{ds}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(s)\right) + 0.\sin(s) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(s)\right) = 0.$$

<u>Conclusion :</u> La torsion est identiquement nulle, donc la courbe Γ est plane.