# TD (S. Laurent et Résidus)

Ce TD est déstiné aux étudiants de $2^e$ année licence mines
($Maths$ 4)

May 1, 2020

Rappelons que, le développement en série de Taylor autour de $z = 0$

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n\geq 0} w^n, \qquad |w| < 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n w^n, \qquad |w| < 1 \tag{2}$$

$$e^w = \sum_{n\geq 0} \frac{w^n}{n!}, \qquad 0 < |w| < \infty \tag{3}$$

$$shw = \sum_{n\geq 0} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad 0 < |w| < \infty \tag{4}$$

**Exercice 1** *Soit* $f(z) = 1 + \dfrac{3}{z+2} - \dfrac{8}{z+3}$.

*Déterminer son développement en série de Laurent pour* $0 < |z+2| < 1$.

On a $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{1+(z+2)}$
en utilisant la formule $(2)$, remplaçant $w$ par $z+2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{1+(z+2)} \\
&= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \ (z+2)^n, \quad |z+2| < 1
\end{aligned}$$

d'où le développement en série de Laurent

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{3}{z+2} + 1 - 8\sum_{n\geq 0} (-1)^n \quad (z+2)^n\,, \\
&= \frac{3}{z+2} - 7 + 8\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \quad (z+2)^n\,, \quad 0 < \ |z+2| < 1.
\end{aligned}$$

**Exercice 2** *Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$, *pour* $0 < |z| < \infty$.

**Solution**
D'après la formule $(3)$, on a

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad 0 < |z| < \infty$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{e^z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad 0 < |z| < \infty \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n-2}}{n!}, \quad 0 < |z| < \infty \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + ..., \qquad 0 < |z| < \infty
\end{aligned}$$

**Exercice 3** *Donner les développements en séries de Laurent de la fonction* $f$ *définie par*

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

*dans trois couronnes de centre* $0$.

**Solution**
on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)} \\
&= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}
\end{aligned}$$

Les couronnes de centre 0 sont

$$|z| < 1, \ 1 < |z| < 2 \text{ et } |z| > 2$$

**1)** Pour $|z| < 1$, on a

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \text{ et } \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z}$$

d'après la formule $(1)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\ &= -\sum_{n\geq 0} z^n, \qquad |z| < 1 \end{aligned}$$

en utilisant la formule $(2)$, remplaçant $w$ par $\frac{z}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |\frac{z}{2}| < 1 \\ &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad |z| < 2. \end{aligned}$$

D'où le développement en série de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= -\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}, \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1\right] z^n, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

**2)** Pour $1 < |z| < 2$, on a

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \text{ et } \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

en utilisant la formule $(1)$, remplaçant $w$ par $\dfrac{1}{z}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \qquad |\frac{1}{z}|<1 \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n}, \qquad |z|>1
\end{aligned}$$

D'où le développement en série de Laurent est

$$f(z)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n}+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}, \qquad 1<|z|<2.$$

**3)** Pour $|z|>2$, on a

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} \text{ et } \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

en utilisant la formule $(2)$, remplaçant $w$ par $\dfrac{2}{z}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad |\frac{2}{z}|<1 \\
&= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}, \\
&= \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad |z|<2.
\end{aligned}$$

D'où le développement en série de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^n\,\frac{2^{n-1}}{z^n}, \\ &= \sum_{n\geq 1}\left[1+2^{n-1}(-1)^n\right]\frac{1}{z^n}, \qquad\qquad |z|>2. \end{aligned}$$

**Exercice 4** *Soit* $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+1)}$, $z\in\mathbb{C}$.

*Calculer les résidus aux singularités isolées de la fonction* $f$.

**Solution**

On cherche, d'abord, les racines du polynôme $z(z+1)$ (dénominateur de $f$), on a

$$z(z+1)=0 \Longrightarrow z=0 \text{ ou } z=-1$$

On déduit que $z(z-1)$ admet 2 racines qui sont $z=0$ et $z=-1$.

On remarque que ces racines ne sont pas des racines de $e^z$ (numérateur de $f$),

ce qui entraîne que $z=0$ et $z=-1$ sont des pôles de $f$ et ils sont tous simples.

Pour les résidus, puisque ces deux pôles sont simples, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}es(f,0) &= \lim_{z\longrightarrow 0} z\ f(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{e^z}{z+1}=1, \\ \mathcal{R}es(f,-1) &= \lim_{z\longrightarrow -1}(z+1)\ f(z)=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{e^z}{z}=-\frac{1}{e}. \end{aligned}$$

**Exercice 5** *Utiliser les développements en séries de Laurent pour déterminer les résidus des fonctions suivantes:*

**1)** $f(z)=\dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ *pour* $0<|z-2|<\infty$.

**2)** $g(z)=\dfrac{shz}{z^4}$ *pour* $0<|z|<\infty$.

**Solution**

**1**) On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2-2z+3}{z-2} \\ &= \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} \\ &= 2+(z-2)+\frac{3}{z-2}, \quad 0<|z-2|<\infty \end{aligned}$$

$f$ a un pôle simple en $z=2$.
Le résidu en ce pôle est $a_{-1}$ le coefficient de $\dfrac{1}{z-2}$, *i.e.*

$$a_{-1} = \mathcal{R}es(f,2) = 3.$$

**2**) D'après la formule (4) , on a

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{shz}{z^4} \\ &= \frac{1}{z^4}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad 0<|z|<\infty \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}, \\ &= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}z+\frac{1}{7!}z^3+\frac{1}{9!}z^5+..., \qquad 0<|z|<\infty \end{aligned}$$

$g$ a un pôle simple en $z=0$.
D'où le résidu en ce pôle est

$$\mathcal{R}es(g,0) = \frac{1}{6}.$$