Module de Pobabilités 2
Chapitre 3 : processus de Poisson
Séance 9

Responsable du cours: Dr. **Metiri Farouk,**
Université de Badji Mokhtar -Annaba-

Mail address: fmetiri@yahoo.fr

Section 3.3: Propriétés du processus de Poisson homogène

Somme de deux processus de Poisson indépendants -Stabilité du caractère poissonnien par sommation finie de processus de Poisson indépendants-

On considère deux processus de Poisson indépendants et on cherche la loi de la somme de ces deux processus. On sait déjà que la somme de variables de Poisson indépendante suit une loi de Poisson. Il en est de même pour les processus de Poisson.

Considérons deux processus de Poisson $\left(N^A(t)\right)_{t\geq 0}$ et $\left(N^B(t)\right)_{t\geq 0}$ indépendants d'intensité respectives λ_1 et λ_2 Alors le processus $N(t) = N^A(t) + N^B(t)$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_A + \lambda_B$.

La probabilité que les deux processus **sautent en même temps est nulle** car leurs temps de saut sont indépendants et suivent des lois **gamma** (loi continue).
On considère le processus $N(t) = N^A(t) + N^B(t)$. On a $N(0) = 0$. Par ailleurs, si $t, s > 0$, alors

$$N(t+s) - N(s) = \left(N^A(t+s) - N^A(s)\right) + \left(N^B(t+s) - N^B(s)\right)$$

N^A est un processus de Poisson, par conséquent $N^A(t+s) - N^A(s)$ suit la loi $P(\lambda_1 t)$ et il est indépendant de $N^A(s)$. De même, $N^B(t+s) - N^B(s)$ suit la loi $P(\lambda_2 t)$ et il est indépendant de $N^B(s)$. Les processus N^A et N^B étant indépendants, on peut déduire que (voir la propriété: **La somme de n variables indépendantes de loi Poisson suit encore une loi de Poisson**):
$N(t+s) - N(s)$ suit une loi de Poisson $P(\lambda_1 t + \lambda_2 t)$ et il est indépendant de $N(s) = N^A(s) + N^B(s)$: *(les accroissements sont donc indépendants)*.

Remarque: Le minimum de variables de loi exponentielle indépendantes **suit encore une loi exponentielle**: soient $X \sim \xi(\lambda)$ et $Y \sim \xi(\theta)$ deux variables indépendantes, alors

$$min(X, Y) \sim \xi(\lambda + \theta)$$

De plus

$$P(min(X, Y) = X) = P(X \leq Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}$$

En appliquant la propriété ci-dessus, la probabilité que le premier processus saute avant le second est égale à:

$$P(min(T_1^A, T_1^B) = T_1^A) = P\left(T_1^A < T_1^B\right) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

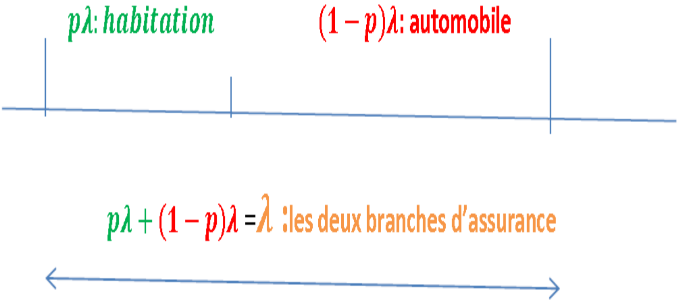
où T_1^A est le premier instant de saut de N^Aet T_1^B est le premier instant de saut de N^B.
Par ailleurs, le premier instant de saut de N a lieu dés que le premier processus entre N^A et N^B saute, par conséquent N saute pour la première fois en $T_1 = min(T_1^A, T_1^B)$. Les instants T_1^A et T_1^B étant indépendants, on peut déduire que l'instant $T_1 =$
$min(T_1^A, T_1^B) \sim \xi(\lambda + \theta)$.

Exemple 3.2: On considère une compagnie d'assurance qui a une branche assurance automobile et une branche assurance habitation. On peut modéliser les instants d'arrivée des sinistres à l'aide de processus de Poisson indépendants pour chacune des branches, d'intensité λ_a pour la branche automobile et d'intensité λ_h pour la branche habitation. Au final, pour la compagnie les instants d'arrivée d'un sinistre (quel qu'il soit) sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda_a + \lambda_h$.

Exemple 3.3: Considérons une compagnie d'assurance. Les sinistres pour un assuré arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ. La compagnie a n clients. On suppose que les assurés ont des comportements indépendants. Alors le nombre de sinistres que doit gérer la compagnie d'assurance est un processus de Poisson d'intensité est: $\lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$.
Supposons par exemple que le nombre moyen de sinistre par individu sur **une année** est de 0.01. On peut modéliser les instants d'arrivée des sinistres par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \frac{0.01}{365}$ **par jour**. On considère que la compagnie d'assurance a $n = 5000$ clients. Alors le premier sinistre de l'année pour la compagnie arrive à l'instant T_1 qui suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda = 5000\lambda = 5000\frac{0.01}{365} = \frac{50}{365}$.
En **moyenne**, le premier sinistre que devra prendre en charge la compagnie arrive au bout de $\frac{1}{5000\lambda} = \frac{365}{50} \simeq 7,3$ jours.

Décomposition d'un processus de Poisson:

On va maintenant voir que si on décompose un processus de Poisson selon des classes, on obtient alors plusieurs processus de Poisson. On considère un processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ de paramètre λ permettant de comptabiliser des événements liés à une population. Les individus de cette population peuvent être soit du type I soit du type II. Par exemple : soit de sexe masculin, soit de sexe féminin si on regarde les visiteurs dans un musée, ou soit des sinistres "habitation" soit des sinistres "automobile" si on considère une compagnie d'assurance. On suppose que la proportion d'individus de type I est égale à p (la proportion d'individus de type II est par conséquent $1-p$).


$p\lambda$: *habitation*
$(1-p)\lambda$: automobile
$p\lambda + (1-p)\lambda = \lambda$:les deux branches d'assurance

On note $N_1(t)$ le nombre de sauts de type I intervenus dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et $N_2(t)$ le nombre de sauts de type II intervenus dans l'intervalle $[0, t]$.
On a par conséquent $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.
Proposition: Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ permettant de comptabiliser une population divisée
en deux classes. La proportion d'individus dans la première classe est égale à p et la proportion d'individus dans la seconde classes est $1-p$.
Les processus $(N_1(t))_{t\geq 0}$ et $(N_2(t))_{t\geq 0}$ obtenus en séparant les sauts par rapport à chaque classe sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.
Cette proposition se généralise facilement lorsque qu'on découpe la population en k sous groupes qui sont distribués selon les proportions $p_1, p_2, ..., p_k \left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$.

Preuve:
Montrons que N_1 et N_2 sont des processus de Poisson au sens de la première définition. On a de façon évidente que
$N_1(0) + N_2(0) = 0$, car $N(0) = 0$.
Soit $n, k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ fixés. on a:

$$\begin{aligned}
P\left(N(t) = n + k\ \right) &= P(N_1\left(t\right) + N_2\left(t\right) = n + k) \\
&= P(N_1\left(t\right) = n, N_2\left(t\right) = n + k - n) \\
&= \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda + (1-p)\lambda)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(p + (1-p))^{n+k}\,(\lambda)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

On utilise La formule du Binôme de Newton:

$$(p+(1-p))^{n+k}=\sum_{n=0}^{n+k} C_{n+k}^{n} p^{n}(1-p)^{n+k-n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
P(N(t)=n+k\ ) &= \sum_{n=0}^{n+k} C_{n+k}^{n} p^{n}(1-p)^{k}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{n+k} \frac{(n+k)!}{n!(n+k-n)!} p^{n}(1-p)^{k}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^{n+k} \frac{(p\lambda)^{n}}{n!}e^{-p\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^{k}}{k!}e^{-(1-p)\lambda}
\end{aligned}$$

Par conséquent $N_1(t)$ et $N_2(t)$ sont indépendants et suivent respectivement les lois de Poisson $P(p\lambda)$ et $P((1-p)\lambda)$.
Étudions les accroissements deN_1 (le raisonnement est identique pour N_2) : Soient $t, s \geq 0$, $N_1(t+s) - N_1(s)$ correspond au nombre de sauts du type I du processus N. Comme N a des accroissements indépendants, les sauts de type I de N sur $[s, t+s]$ sont indépendants de tous les sauts intervenus avant l'instant s, et donc indépendant de ceux de type I avant l'instant s. Donc N_1 a des accroissements indépendants. On montre que les accroissements sont stationnaires de la même façon que précédemment en calculant $P(N_1(t+s) - N_1(s) = n, N_2(t+s) - N_2(s) = k)$ pour tout $s, t \geq 0$ et $k, n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.4:
On considère une compagnie d'assurance qui s'occupe d'assurance habitation et assurance automobile. On suppose que sa proportion de contrat automobile est égal à $\frac{3}{4}$. On suppose que les sinistres arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 10 par mois.

$$T_1^{hab} > 3mois$$

$$N_1^{hab} \sim Poisson\left(\frac{10}{4} \times 3\right) \ et \ T_1^{hab} \sim exp(2.5 \times 3)$$

La probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant 3 mois peut être calculée de deux manières différentes:
(1) Le nombre de sinistre habitation **par mois** est un processus de Poisson N^{hab} de paramètre $\frac{1}{4}.10 = 2.5$ par mois. Si on cherche le nombre de sinistres pendant 3 mois, cela signifie que
$N^{hab} \sim Poisson(2.5 \times 3)$
Par conséquent, la probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant trois mois est égale à:

$$P\left(N^{hab} = 0\right) = \frac{(7.5)^0}{0!} e^{-7.5} \simeq 5.53 \times 10^{-4}.$$

(2) On sait que la loi des durées d'attente pour un processus de poisson homogène esu loi exponentielle, Donc, pour une durée de trois mois, on a: $T_i^{hab} \sim \exp\left(2.5 \times 3 = 7.5\right)$

$$\begin{aligned} P(\text{pas de sinistre habitation pendant 3 mois}) &= P\left(T_1^{hab} > 3\right) \\ &= 1 - F_{T_1^{hab}}(3) = e^{-3.2.5} \\ &= e^{-7.5} \simeq 5.53 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

où T_1^{hab} représente le premier instant où un sinistre habitation intervient.

Quelle est la loi conditionnelle du processus de Poisson en fonction du nombre de sauts:

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$ un processus de Poisson d'intensité λ.
On le considère sur l'intervalle [0, t]. Sur cet intervalle, le nombre de saut suit une loi de Poisson de paramètre λt.
Connaissant le nombre de sauts, que peut-on dire de la loi des instants de sauts. Par exemple, sachant qu'il n'y a eu qu'un saut sur l'intervalle de temps [0, t], quelle est la loi du premier instant de saut T_1. Cet instant est forcément inférieur à t. On a pour $s \leq t$

$$P\left(T_1 < s \mid N(t) = 1\right) = \frac{P\left(T_1 < s,\ N(t) = 1\right)}{P(N(t) = 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P\left(\text{avoir 1saut sur}[0, s)\text{et aucun saut sur } [s, t]\right)\big)}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{P\left(\text{avoir 1saut sur}[0, s)\ \right) P\left(\text{aucun saut sur } [s, t]\right)\big)}{\lambda t e^{-\lambda t}} \end{aligned}$$

Par indépendance des accroissements, on obtient:

$$= \frac{\left(\lambda s e^{-\lambda s}\right)\left(e^{-\lambda(t-s)}\right)}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} = \frac{s-0}{t-0} = F_{T_1}(s)$$

Par conséquent la loi de T_1 sachant que $N(t)=1$ est la loi uniforme sur $[0,t]$.

Bon courage