

Séries de Laurent et Résidus

Ce cours est destiné aux étudiants de 2^e année licence mines
(*Maths 4*)

May 1, 2020

Le développement de Taylor d'une fonction permet d'exprimer la valeur de la fonction sur un domaine simplement connexe (un disque) où la fonction est holomorphe. Néanmoins il serait intéressant d'obtenir un résultat analogue lorsque le domaine n'est pas simplement connexe. Dans ce cas il deviendrait possible de représenter une fonction même au voisinage d'un domaine (ou d'un point) où elle n'est pas holomorphe. On va montrer que les séries de Laurent permettent cela.

Et le théorème des résidus constitue un outil de calcul d'une puissance extraordinaire.

1 Série de Laurent

Le développement en série de Laurent constitue une généralisation du développement en série de Taylor.

Définition 1 Une couronne de centre z_0 et de rayons R_1, R_2 notée $\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$ est définie par

$$\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Remarque 2 Une fonction holomorphe définie dans une couronne est développable en série de Laurent.

Théorème 3 Si la fonction f est holomorphe à l'intérieur de la couronne $\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$, alors en tout point de ce domaine, la fonction f est développable en série de Laurent de la forme

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

le long d'une courbe fermée γ contenue dans la couronne. La série est convergente dans la couronne circulaire.

On peut écrire la série de Laurent de f définie par (1) sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

La première somme est appelée partie principale (ou bien singulière) et la seconde partie régulière (ou bien analytique).

Remarque 4 Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Exemple 5 Soit $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^*$.

Rappelons que $e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$, alors pour $w = \frac{1}{z}$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n} \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \end{aligned}$$

1.1 Points singuliers

Définition 6 Un point z_0 est appelé point singulier d'une fonction f si f n'est pas analytique en z_0 , mais si dans chaque voisinage de z_0 , on peut trouver un point où elle est analytique.

1.1.1 Points isolés

Définition 7 Un point singulier est dit isolé si, de plus, il existe un voisinage de z_0 dans lequel f est analytique (à l'exception de z_0 lui-même).

1.1.2 Classification des points singuliers

Définition 8 Soit f une fonction holomorphe définie sur l'ouvert E sauf en $z_0 \in E$, alors que f présente en z_0 une singularité

1) Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

2) Si l'on peut trouver un entier positif p tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^p f(z)$ existe et finie, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre p .

Si $p = 1$, alors z_0 est appelé un pôle simple.

Si z_0 est un pôle simple de f , alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

3) Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Exemple 9 1) Soit $f(z) = \frac{\sin z}{z}$,

f possède un point singulier isolé en $z = 0$.

Puisque $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$,

alors Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction f .

2) Soit $g(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z - 1)^2(z^2 + 1)}$,

g possède 4 points singuliers isolés en $z = 1$ et $z = \pm i$.

Puisque $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 f(z) = \frac{3}{2}$,

alors Le point singulier $z = 1$ est un pôle double de la fonction g .

En plus,

on a $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$

Puisque $\lim_{z \rightarrow i} (z - i)^2 f(z) = -\frac{1}{4}$,

alors Le point singulier $z = i$ est un pôle simple de la fonction g .

De même, on a $\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)^2 f(z) = \frac{1}{4}$,

alors Le point singulier $z = -i$ est un pôle simple de la fonction g .

3) Soit $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$,
h a une singularité essentielle en $z = 0$:

1.2 Singularités à l'infini

En posant $z = \frac{1}{w}$ dans f on obtient $f(\frac{1}{w}) = h(w)$.

Alors la nature de la singularité à ∞ est définie comme étant la même que celle de h en $w = 0$.

Exemple 10 1) Soit $f(z) = z^4$,

Posons $z = \frac{1}{w}$,

alors $h(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^4}$,

et comme h possède un pôle d'ordre 4 en $w = 0$

donc f possède un pôle d'ordre 4 en $z = \infty$.

2) Soit $g(z) = e^z$,

Posons $z = \frac{1}{w}$,

alors $h(w) = g(\frac{1}{w}) = e^{\frac{1}{w}}$,

et comme h possède une singularité essentielle en $w = 0$

donc g possède une singularité essentielle en $z = \infty$.

3) Soit $k(z) = z \sin \frac{1}{z}$,

Posons $z = \frac{1}{w}$,

alors $h(w) = k(\frac{1}{w}) = \frac{\sin w}{w}$,

et comme h possède une singularité apparente en $w = 0$

donc k possède une singularité apparente en $z = \infty$.

2 Résidus

Soit z_0 un point singulier isolé de f , la fonction f est représentée par la série de Laurent dans le voisinage $z_0 = 0$.

Définition 11 On appelle résidu de f au point z_0 , noté $\mathcal{R}es(f, z_0)$, le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f dans la couronne $0 < |z - z_0| < R$.

Remarque 12 Si f une fonction holomorphe en z_0 , alors son développement de Taylor coïncide avec son développement de Laurent en z_0 .

Donc $\mathcal{R}es(f, z_0) = 0$.

2.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en z_0 , on a besoin d'écrire le développement de f en série de Laurent dans le voisinage de z_0 . Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent. On peut en particulier donner des méthodes de calcul pour les cas suivants.

2.1.1 Pôle simple

Si z_0 est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple

$$a_{-1} = \mathcal{R}es(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Exemple 13 Soit $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$,
alors $z = 1$, $z = 3$ sont des pôles simples.
Posons $a_{-1} = \mathcal{R}es(f, 1)$ et $b_{-1} = \mathcal{R}es(f, 3)$
alors

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \mathcal{R}es(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{1}{(z - 1)(z - 3)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z - 3} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
b_{-1} &= \mathcal{R}es(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3)f(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{1}{(z - 1)(z - 3)} \\
&= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque 14 Si z_0 est un pôle simple et f se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0$$

alors

$$\mathcal{R}es(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Exemple 15 Soit $f(z) = \frac{z + 2}{z^2 - 1} = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 1)}$

f possède 2 pôles simples en $z = \pm 1$.

on a $Q(z) = z^2 - 1 \implies Q'(z) = 2z$.

Pour $z = 1$, on a

$$Q(1) = 0 \text{ et } Q'(1) = 2 \neq 0$$

donc

$$\mathcal{R}es(f, 1) = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{3}{2}.$$

Pour $z = -1$, on a

$$Q(-1) = 0 \text{ et } Q'(-1) = -2 \neq 0$$

donc

$$\mathcal{R}es(f, -1) = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = -\frac{3}{2}.$$

2.1.2 Pôle d'ordre $k \geq 2$

Dans le cas où z_0 est un pôle d'ordre $k \geq 2$, le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$a_{-1} = \mathcal{R}es(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \right\}.$$

Cette formule est intéressante seulement quand l'ordre est 2 ou 3 à la limite. Si l'ordre est grand 4 ou plus, mieux faut utiliser le développement de Laurent.

Si $k = 2$ (pôle double) le résultat est

$$a_{-1} = \mathcal{R}es(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)].$$

Exemple 16 Soit $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^2}$,
 alors $z = 0$ est un pôle simple, $z = -2$ est un pôle double.
 Posons $a_{-1} = \mathcal{R}es(f, 0)$ et $b_{-1} = \mathcal{R}es(f, 2)$
 alors

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \mathcal{R}es(f, 0) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+2)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \mathcal{R}es(f, -2) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} [(z+2)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2.1.3 Point singulier essentiel

Si z_0 est un point singulier essentiel, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 17 Soit $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$,
 alors $z = 0$ est un point singulier essentiel, on a

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$, i.e.

$$\mathcal{R}es(f, 0) = 1.$$