Chapitre II: Notions d'élasticité

CONTENU DU CHAPITRE II

II-1 Définition de l'élasticité

II-2 L'origine microscopique de l'élasticité

II-3 Vecteur contraintes : $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$

- Contrainte normale et contrainte tangentielle
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Symétrie du tenseur des contraintes-Notation de Voigt
- Pression isostatique

II-4 Déformations :

- Tenseur déformations $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$
- Déformation transversale
- Déformation longitudinale
- Coefficient de Poisson

II-5 Relation contrainte-Déformations :

- Modules d'élasticité $\boldsymbol{C_{ij}}$ et compliances $\boldsymbol{S_{ij}}$ (notation matricielle et notation de Voigt)
- La loi de Hooke : Module de Young.

II-6 Thermodynamique de l'élasticité.

II-7 Traitement des solides isotropes :

- Condition d'isotropie
- Facteur d'anisotropie
- Les équations de Lamé : *les coefficients de Lamé
  * Module de cisaillement
- Les relations de Young.

Chapitre II: Notions d'élasticité

Chap II (c.à.d partie C du chap II)

Relations Contraintes-déformations
Tenseur élastique

P. V-1

V-1 : Loi de Hooke

1/ Un solide soumis à 1 contrainte se déforme

2/ Si la contrainte est inférieure à une valeur limite appelée "limite d'élasticité" la déformation est réversible c.à.d le solide reprend sa forme initiale si on cesse d'exercer la contrainte.

3/ De plus si la contrainte est assez faible, la déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée : C'est la loi de Hooke. qui s'écrit dans le cas d'une barre isotrope soumise à 1 tension pure :

Cas d'une barre (isotrope) soumise à une tension pure (traction)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= S\,\sigma\\ \sigma &= C\,\varepsilon\end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \frac{1}{S}$$

σ = la contrainte

ε = l'allongement unitaire $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

C = module d'élasticité ou rigidité (Module de Young)

S = Complaisance (ou Compliance) ou élasticité

→ les deux on les appelle les constantes d'élasticité

On peut généraliser cette notion :

Nous savons qu'une contrainte σ et une déformation homogène ε peuvent être représentées par un tenseur de rang 2.

→ Si on applique au cristal une contrainte σ_{ij}, la déformation homogène ε_{ij} est reliée aux composantes de la contrainte par une relation linéaire :

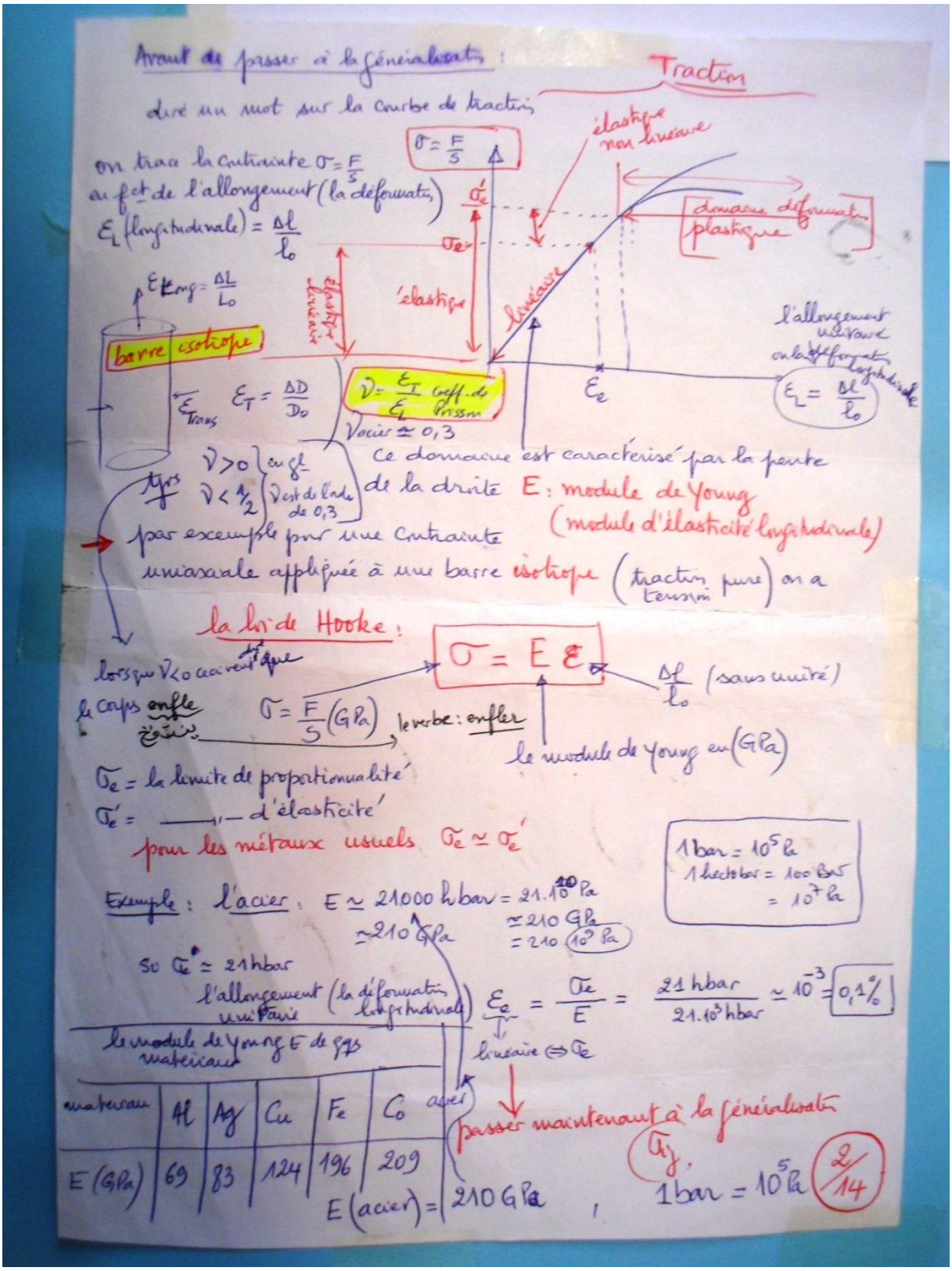
1er eqt $i=1$, $j=1$ $\Rightarrow$

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33}$$

et 8 autres eqts $\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}\ \ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\ \ \varepsilon_{32}\end{matrix}\right.$ les S étant des constantes

01/14

Chapitre II: Notions d'élasticité



Ainsi la loi de Hooke généralisée s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\,\sigma_{kl} \quad \rightarrow (1)$$

Les S_{ijkl} sont au nombre de 81 car chaque ept contient 9 et on a 9 ept $\Rightarrow$ 81 S_{ijkl}

et on peut écrire les contraintes σ_{ij} en fct des déformations ε_{kl}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad \rightarrow (2)$$

Les coefficients C_{ijkl} sont des fct linéaires des S_{ijkl}.

Rq importante :

Dans le cas (2), on remarque que si l'on applique une contrainte de traction unitaire σ_{11} toutes les composantes de déformation sont différents de zéro ($S_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \neq 0$). Cela veut dire que la déformation n'est pas uniquement un allongement dans le sens de la contrainte, mais également une Contraction perpendiculaire accompagné de cisaillement.

C-V-2 : Signification géométrique :

On soumet le solide à des contraintes simples. Par exemple on applique un cisaillement σ_{12} (ce qui entraîne aussi σ_{21}), il vient :

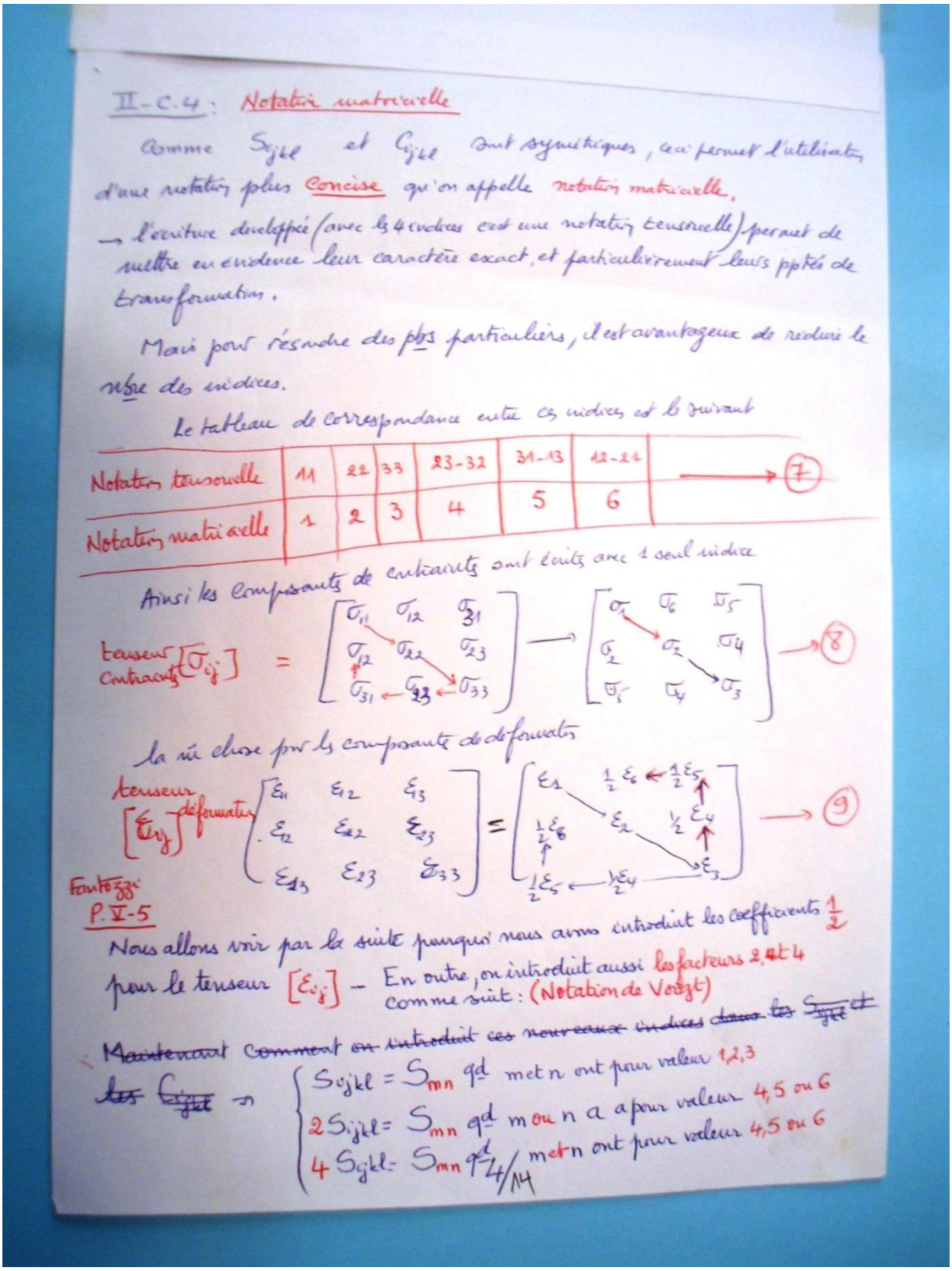
$$\varepsilon_{11} = S_{1112}\,\sigma_{12} + S_{1121}\,\sigma_{21} = (S_{1112} + S_{1121})\,\sigma_{12}$$

Il est impossible de faire une expérience permettant de séparer S_{1112} de S_{1121} on admettra donc que

$$S_{ijkl} = S_{ijlk} \quad \rightarrow (3)$$

3/14

Chapitre II: Notions d'élasticité



II-C.4 : Notation matricielle

Comme S_{ijkl} et C_{ijkl} sont symétriques, ceci permet l'utilisation d'une notation plus concise qu'on appelle notation matricielle.

→ l'écriture développée (avec les 4 indices c'est une notation tensorielle) permet de mettre en évidence leur caractère exact et particulièrement leurs ppties de transformation.

Mais pour résoudre des pbs particuliers, il est avantageux de réduire le nbre des indices.

Le tableau de correspondance entre ces indices est le suivant

Notation tensorielle	11	22	33	23-32	31-13	12-21	→ (7)
Notation matricielle	1	2	3	4	5	6	

Ainsi les composants de contraints sont écrits avec 1 seul indice

Tenseur contraints $[\sigma_{ij}]$ = $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ → (8)

la même chose pour les composants de déformation

Tenseur déformation $[\varepsilon_{ij}]$ $\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$ → (9)

Fantozzi P.V-5

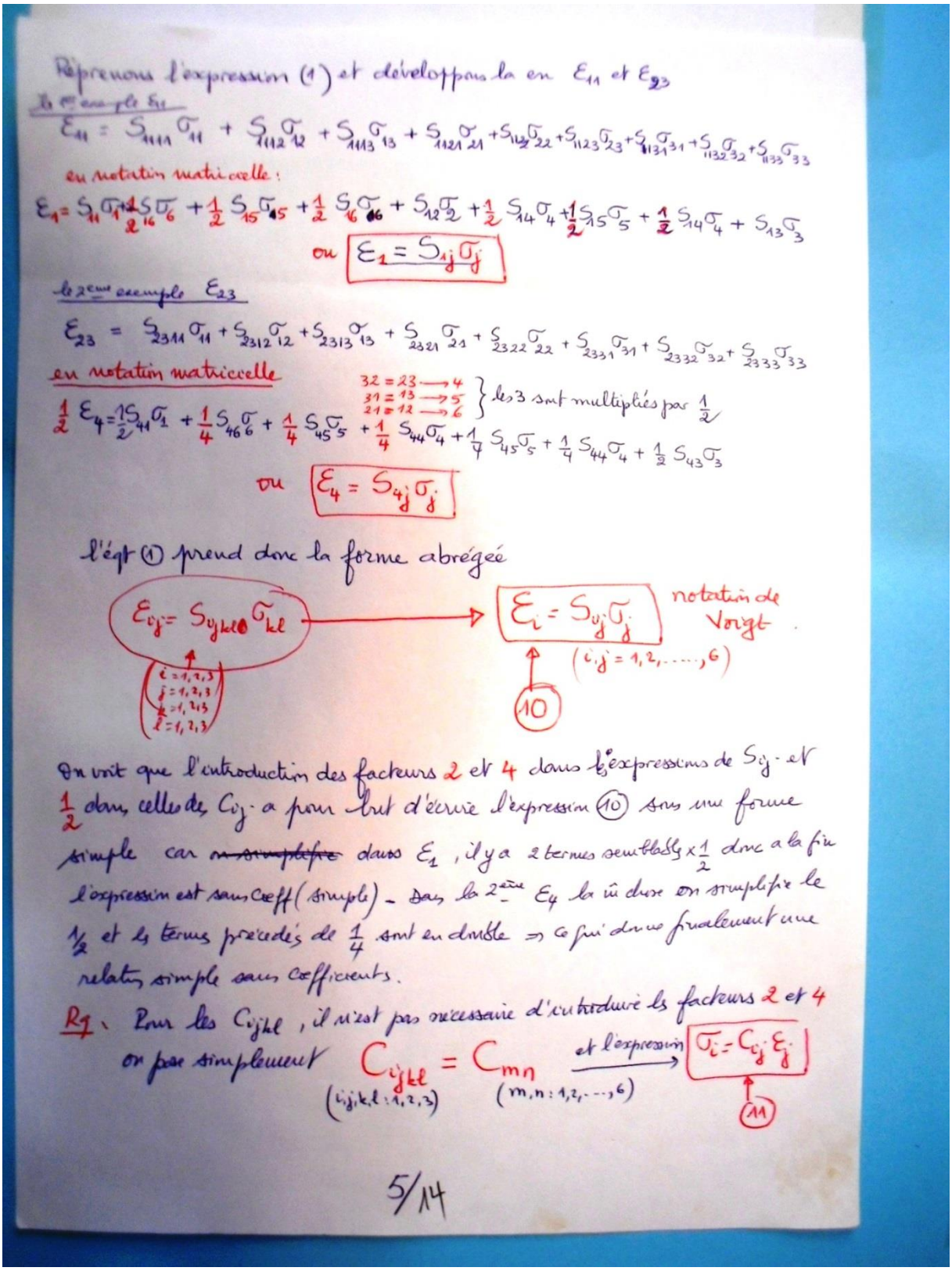
Nous allons voir par la suite pourquoi nous avons introduit les coefficients $\frac{1}{2}$ pour le tenseur $[\varepsilon_{ij}]$ – En outre, on introduit aussi les facteurs 2, 4 et 4 comme suit : (Notation de Voigt)

~~Maintenant comment on introduit ces nouveaux indices dans les S_{ijkl} et C_{ijkl}~~ →

$S_{ijkl} = S_{mn}$ qd m et n ont pour valeur 1,2,3

$2S_{ijkl} = S_{mn}$ qd m ou n a pour valeur 4,5 ou 6

$4S_{ijkl} = S_{mn}$ qd 4/14 m et n ont pour valeur 4,5 ou 6


Reprenons l'expression (1) et développons la en ε_{11} et ε_{23}
le 1er exemple ε_{11}
$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1121}\sigma_{21} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1123}\sigma_{23} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1133}\sigma_{33}$
en notation matricielle :
$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2}S_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2}S_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}S_{16}\sigma_6 + S_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2}S_{14}\sigma_4 + \frac{1}{2}S_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}S_{14}\sigma_4 + S_{13}\sigma_3$
ou $\varepsilon_1 = S_{1j}\sigma_j$
le 2ème exemple ε_{23}
$\varepsilon_{23} = S_{2311}\sigma_{11} + S_{2312}\sigma_{12} + S_{2313}\sigma_{13} + S_{2321}\sigma_{21} + S_{2322}\sigma_{22} + S_{2331}\sigma_{31} + S_{2332}\sigma_{32} + S_{2333}\sigma_{33}$
en notation matricielle
$\frac{1}{2}\varepsilon_4 = \frac{1}{2}S_{41}\sigma_1 + \frac{1}{4}S_{46}\sigma_6 + \frac{1}{4}S_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4}S_{44}\sigma_4 + \frac{1}{4}S_{45}\sigma_5 + \frac{1}{4}S_{44}\sigma_4 + \frac{1}{2}S_{43}\sigma_3$
32 = 23 → 4
31 = 13 → 5
21 = 12 → 6
les 3 sont multipliés par $\frac{1}{2}$
ou $\varepsilon_4 = S_{4j}\sigma_j$
l'égt (1) prend donc la forme abrégée
$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$
$i = 1,2,3$
$j = 1,2,3$
$k = 1,2,3$
$l = 1,2,3$
$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j$ notation de Voigt
$(i,j = 1,2,\ldots,6)$
(10)
On voit que l'introduction des facteurs 2 et 4 dans les expressions de S_{ij} et $\frac{1}{2}$ dans celles de C_{ij} a pour but d'écrire l'expression (10) sous une forme simple car ~~n'est pas simple~~ dans ε_1, il y a 2 termes semblables $\times\frac{1}{2}$ donc à la fin l'expression est sans Coeff (simple) - Dans la 2ème ε_4 la ii dans on simplifie le $\frac{1}{2}$ et les termes précédés de $\frac{1}{4}$ sont en double ⇒ ce qui donne finalement une relation simple sans coefficients.
Rq. Pour les C_{ijkl}, il n'est pas nécessaire d'introduire les facteurs 2 et 4 on pose simplement $C_{ijkl} = C_{mn}$ $(i,j,k,l = 1,2,3)$ $(m,n = 1,2,\ldots,6)$ et l'expression $\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$
(11)
5/14

Chapitre II: Notions d'élasticité

Les tableaux des S_{ij} et C_{ij} s'écrivent classiquement sous la forme carrée :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & \times & \times & \times & \times & \times \\ S_{51} & \times & \times & \times & \times & \times \\ S_{61} & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & \times & \times & \times & \times & \times \\ C_{51} & \times & \times & \times & \times & \times \\ C_{61} & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Rq importante :

Malgré les apparences, les S_{ij} et les C_{ij} à deux indices ne sont pas les composantes d'un tenseur de rang 2 et ne se transforment pas comme tels. Il faut revenir à la notation tensoriel avant de les transformer dans un autre système d'axes.

II-C-5 : Thermodynamique de la déformation

(P.-VI-8)

i) Travail des contraintes agissant sur un élément de volume (V).

↓ après démonstration on aboutit à la relation

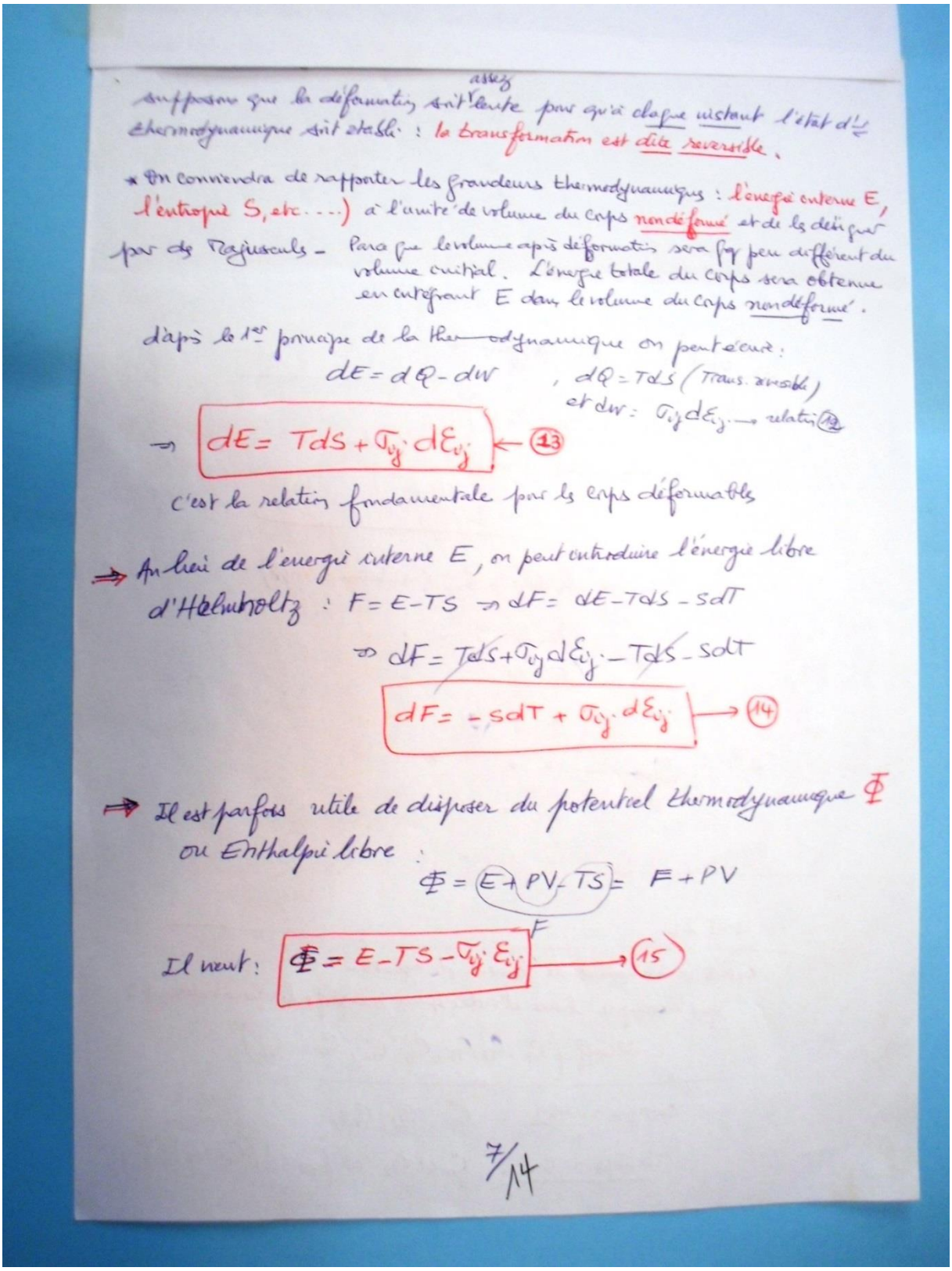
en notation tensorielle → $\delta W = \sigma_{ij} \, \delta\varepsilon_{ij}$ (12) c'est la densité d'énergie emmagasinée (énergie par unité de volume)

→ en notation matricielle : $\delta W = \sigma_i \, d\varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, 6)$

II-C-6 : Définition thermodynamique de l'élasticité

Si la déformation est assez petite, le corps revient à son état initial non déformé qd les forces extérieures responsables de la déformation sont supprimées : on a alors une déformation élastique dans le cas contraire on a une déformation résiduelle : déformation plastique.

6/14



Supposons que la déformation soit assez lente pour qu'à chaque instant l'état d'équilibre thermodynamique soit établi : la transformation est dite réversible.

* On convient de rapporter les grandeurs thermodynamiques : l'énergie interne E, l'entropie S, etc....) à l'unité de volume du corps non déformé et de les désigner par des majuscules - Para que le volume après déformation sera peu différent du volume initial. L'énergie totale du corps sera obtenue en intégrant E dans le volume du corps non déformé.

d'après le 1er principe de la thermodynamique on peut écrire :

$$dE = dQ - dW \quad , \quad dQ = TdS \text{ (Trans. réversible)}$$

et $dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ → relation (12)

$$\Rightarrow \boxed{dE = TdS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}} \leftarrow (13)$$

C'est la relation fondamentale pour les corps déformables

⇒ Au lieu de l'énergie interne E, on peut introduire l'énergie libre d'Helmholtz : $F = E - TS \Rightarrow dF = dE - TdS - SdT$

$$\Rightarrow dF = TdS + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - TdS - SdT$$

$$\boxed{dF = -SdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}} \rightarrow (14)$$

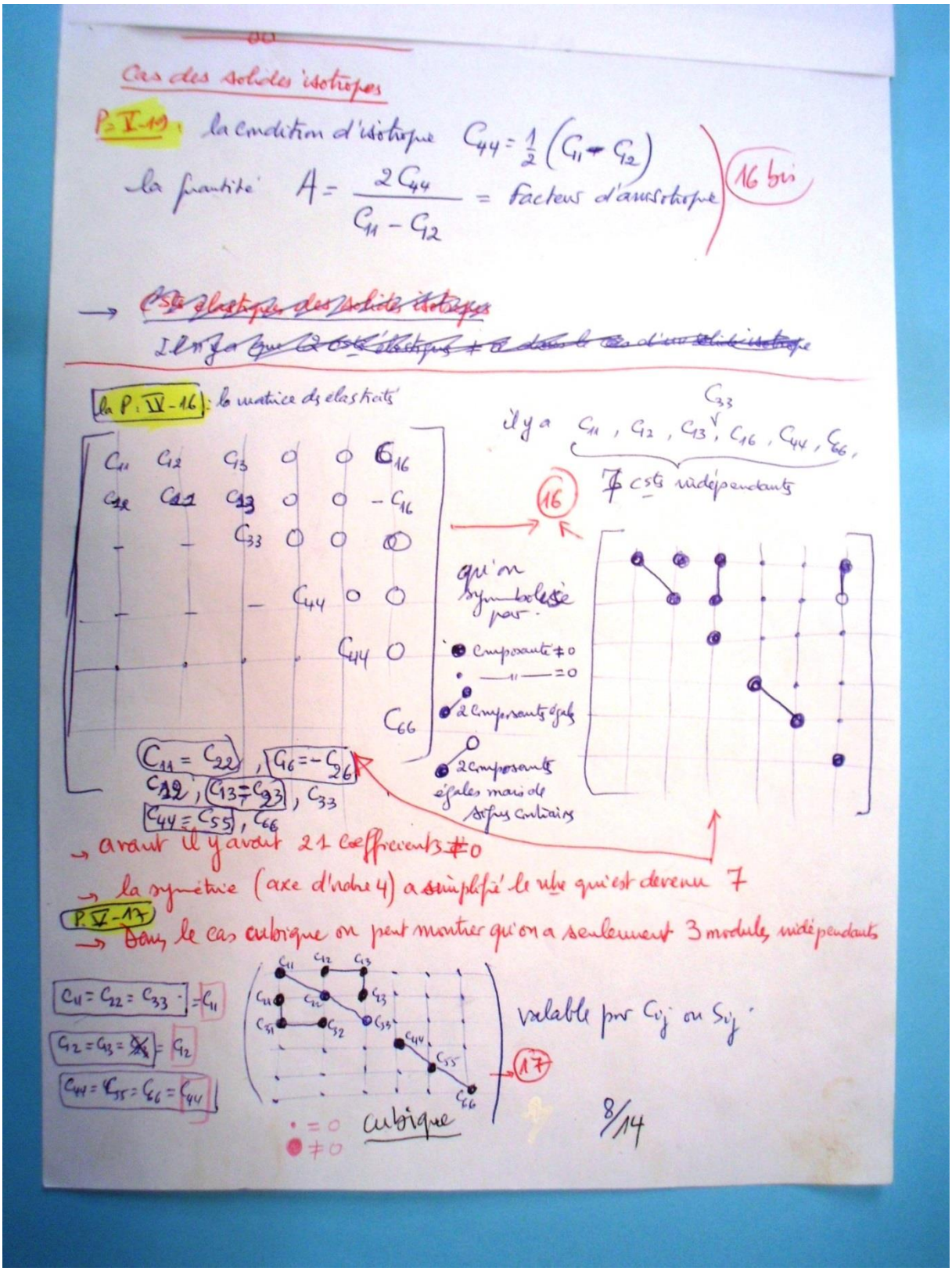
⇒ Il est parfois utile de disposer du potentiel thermodynamique Φ ou Enthalpie libre :

$$\Phi = (E + PV - TS) = F + PV$$

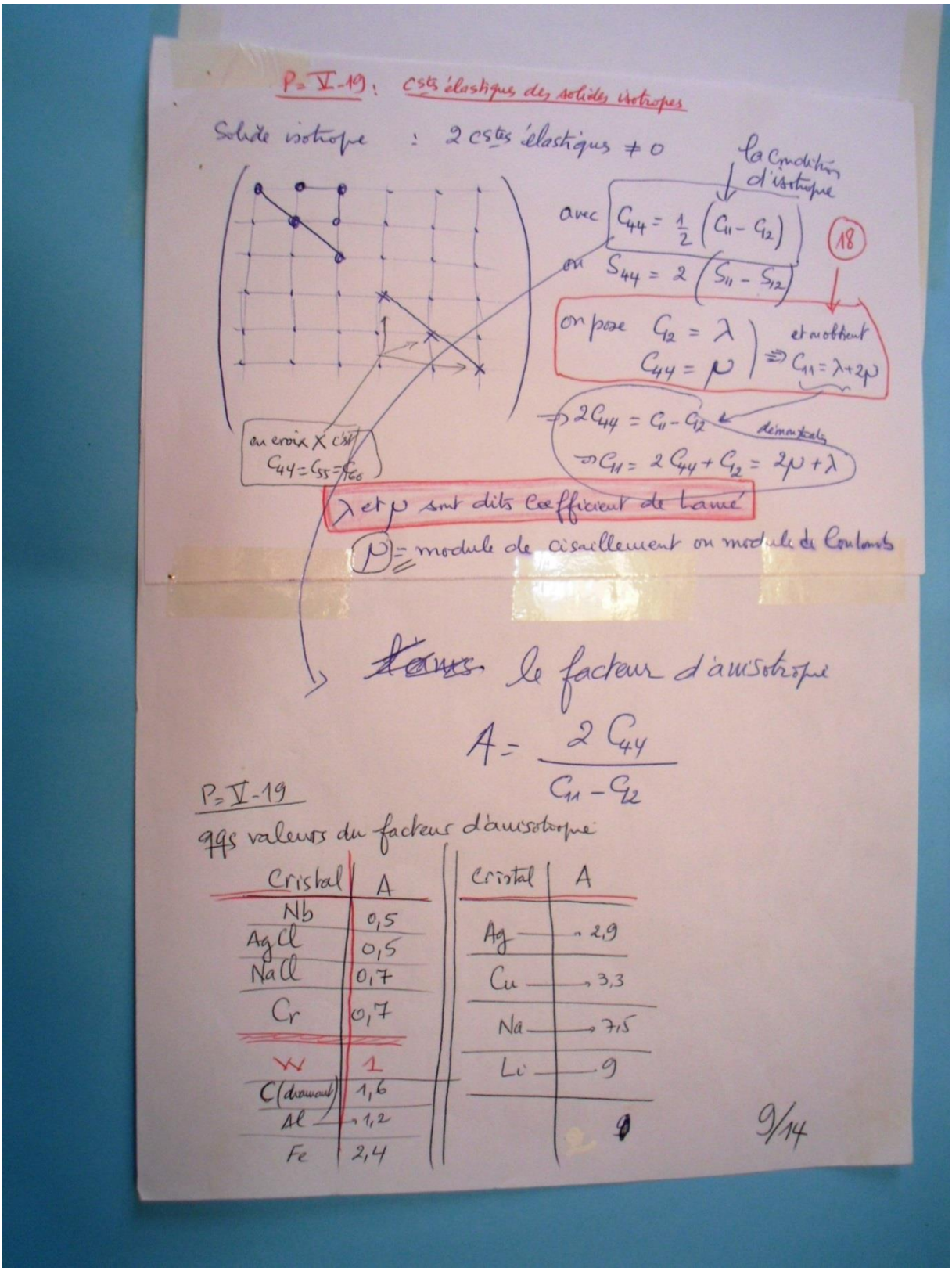
Il vient : $\boxed{\Phi = E - TS - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}} \rightarrow (15)$

7/14

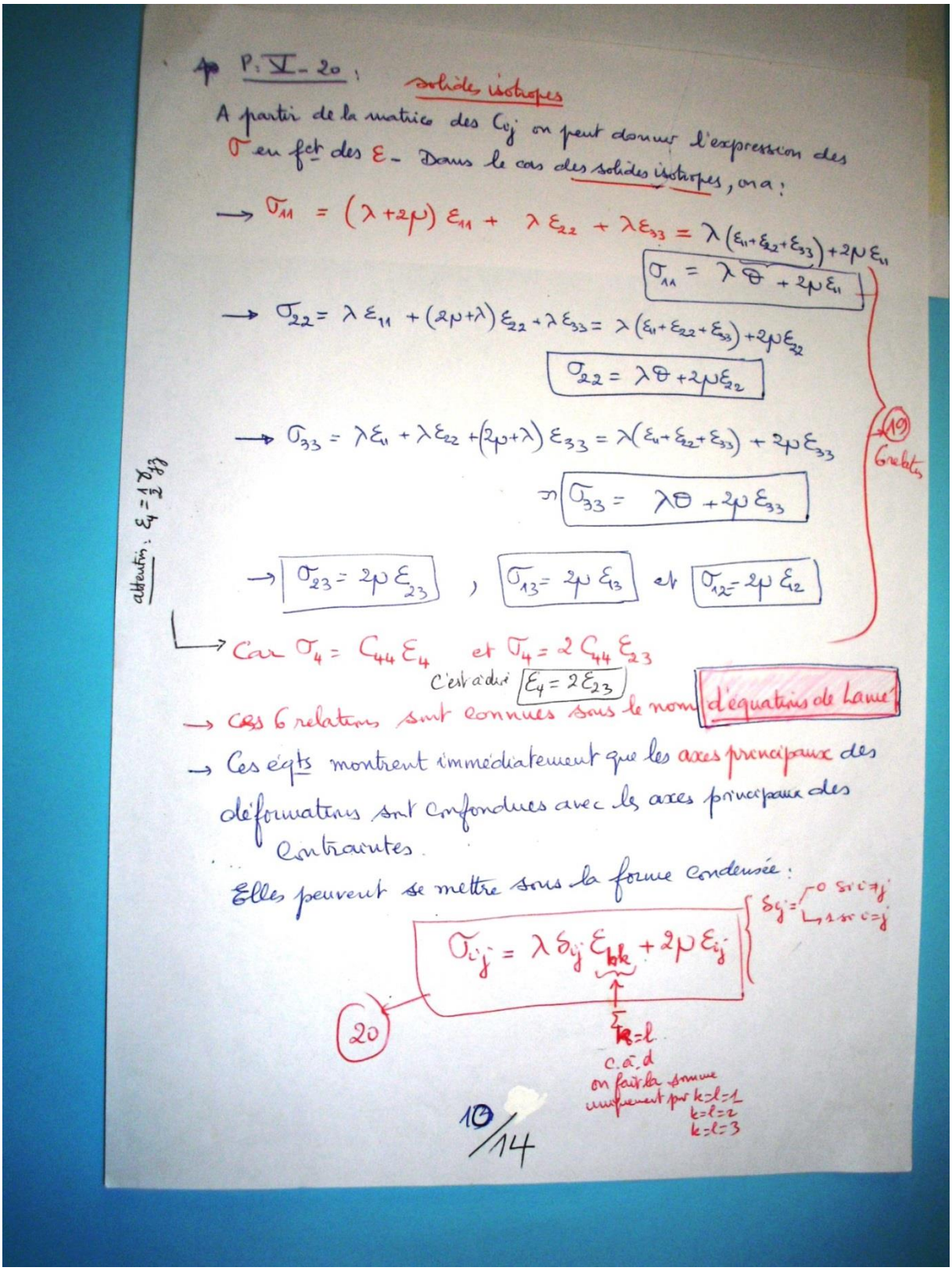
Chapitre II: Notions d'élasticité

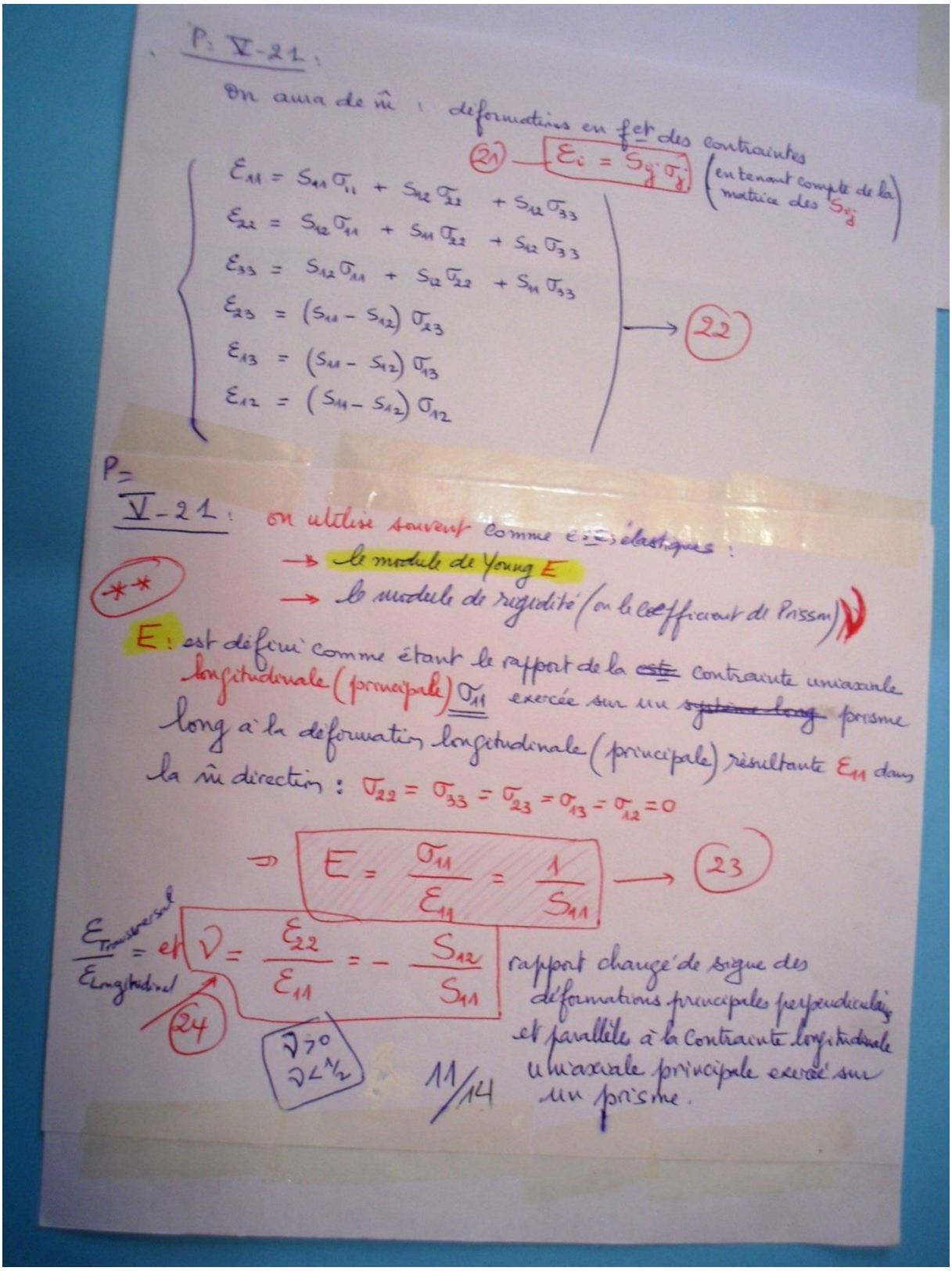


Chapitre II: Notions d'élasticité



Chapitre II: Notions d'élasticité





P: V-21 :

On aura de même : déformations en fct des contraintes (21) $\varepsilon_i = S_{ij}\,\sigma_j$ (en tenant compte de la matrice des S_{ij})

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{12}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{22} = S_{12}\sigma_{11} + S_{11}\sigma_{22} + S_{12}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{33} = S_{12}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{11}\sigma_{33} \\ \varepsilon_{23} = (S_{11} - S_{12})\,\sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = (S_{11} - S_{12})\,\sigma_{13} \\ \varepsilon_{12} = (S_{11} - S_{12})\,\sigma_{12} \end{cases} \rightarrow (22)$$

P= V-21 : on utilise souvent comme c. élastiques :

(**) → le module de Young E

→ le module de rigidité (ou le coefficient de Poisson)

E : est défini comme étant le rapport de la ~~cste~~ contrainte uniaxiale longitudinale (principale) σ_{11} exercée sur un ~~système long~~ prisme long à la déformation longitudinale (principale) résultante ε_{11} dans la même direction : $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{S_{11}}} \rightarrow (23)$$

$\frac{\varepsilon_{Transversal}}{\varepsilon_{Longitudinal}}$ = et $\boxed{\nu = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}}$ (24)

rapport changé de signe des déformations principales perpendiculaire et parallèle à la contrainte longitudinale uniaxiale principale exercée sur un prisme.

$\nu > 0$; $\nu < 1/2$

11/14

P: V-22

Ainsi les éqts (22) s'écrivent :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})\right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{33})\right] \quad \rightarrow (23)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\right]$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}$$

Ce sont les relations de YOUNG

ce qui s'écrit : $E\,\varepsilon_{ij} = (1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk}$

Rq : L'énergie de déformation du cristal doit être positive, sans quoi le cristal serait instable.

c.à.d : $2F = \lambda(\varepsilon_{ii})^2 + 2\mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}^2 > 0$ (doit être) → (24)

→ Dans le cas isotrope : il faut et il suffit que $\mu > 0$ et $(3\lambda + 2\mu) > 0$

ce qui entraîne $E > 0$ et $-1 < \nu < \frac{1}{2}$

→ En fait on ne connaît pas de corps (sauf la pyrite FeS_2) pour lesquels $\nu < 0$ (c.à.d qui enfleraient en s'allongeant) ينتفخ عندما يتمدد

donc $\nu > 0$ et $\nu < \frac{1}{2}$ → En gl ν est de l'ordre de 0,3

Expressions de E et de ν en fct de λ et de μ

→ Pour exprimer E et ν en fct de λ et μ, étudions le cas de la traction (ou compression) simple : $\sigma_1 \neq 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = \dots = 0$

12/14

Dans ces conditions, compte tenu de la forme de la matrice des (compliances S_{ij})

on a : $\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1$
$\varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1$
$\varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1 = \varepsilon_2$ } → (25)

Les eqts (19) s'écrivent alors :

$\sigma_{11} = (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$
$\sigma_{22} = 0 = \lambda\varepsilon_{11} + (2\mu+\lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$ } → (26)

soit en divisant par ε_{11} :

$$E = (2\mu+\lambda) - 2\lambda\nu = 2\mu + \lambda(1-2\nu)$$
$$0 = \lambda - (2\mu+\lambda)\nu - \lambda\nu = \lambda(1-2\nu) - 2\mu\nu$$

soit en combinant ces expressions :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow E = 2\mu(1+\nu) \rightarrow (27)$$

$2\nu = \frac{E-2\mu}{\mu}$ d'où $E = 2\mu + \lambda - \lambda\left(\frac{E-2\mu}{\mu}\right)$ soit $E = \frac{(2\mu+3\lambda)\mu}{\mu+\lambda}$ (28)

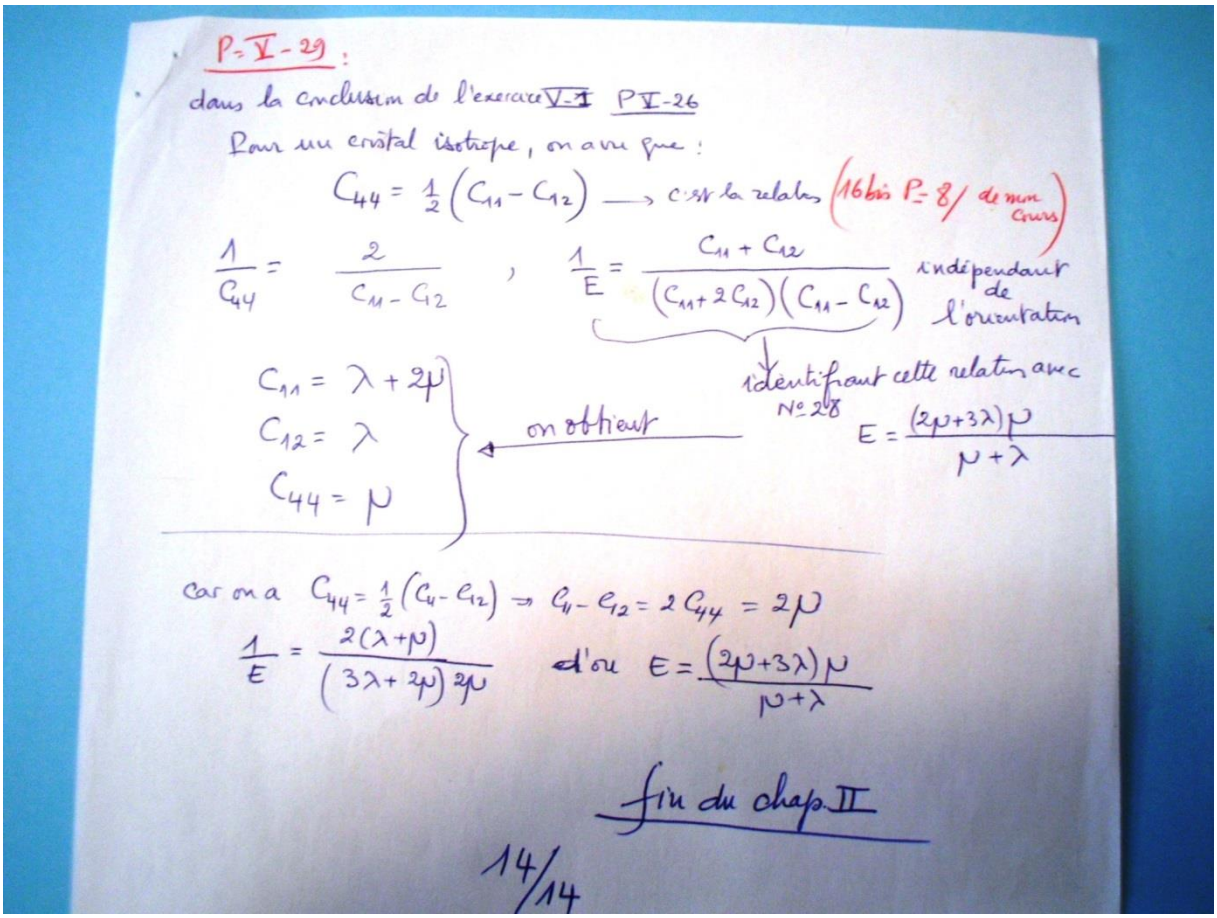
ou $$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \rightarrow (29)$$

il vient également : $$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \rightarrow (30)$$

Les coefficients de Lamé λ et μ en fct des csts d'élasticité E (module de Young) et ν (Coeff de Poisson)

13/14

Chapitre II: Notions d'élasticité



P-V-29 :

dans la conclusion de l'exercice V-1 P V-26

Pour un cristal isotrope, on a vu que :

$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ ⟶ c'est la relation (16bis P-8/ de mon Cours)

$\frac{1}{C_{44}} = \frac{2}{C_{11} - C_{12}}$, $\frac{1}{E} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}$ indépendant de l'orientation

identifiant cette relation avec N° 28

$C_{11} = \lambda + 2\mu$

$C_{12} = \lambda$

$C_{44} = \mu$

on obtient $E = \frac{(2\mu + 3\lambda)\mu}{\mu + \lambda}$

car on a $C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \Rightarrow C_{11} - C_{12} = 2C_{44} = 2\mu$

$\frac{1}{E} = \frac{2(\lambda + \mu)}{(3\lambda + 2\mu)2\mu}$ d'où $E = \frac{(2\mu + 3\lambda)\mu}{\mu + \lambda}$

fin du chap II

14/14