Département de Génie Mécanique – Université Badji Mokhtar
Annaba

TD **Méthode des volumes finis** pour les étudiants de **Master I - Énergétique**

Responsable du module: Dr **F. MECHIGHEL**

TD sur le Chapitre 4

Résolution d'un problème de convection-diffusion par la méthode des volumes finis

Exercice 1 :

Une propriété ϕ est transportée par convection et diffusion à travers le domaine unidimensionnel illustré à la figure 1 ci-dessous. Les conditions aux limites de ce problème physique sont données telles que :

À $x = 0$ $\quad\quad$ $\phi_0 = 1$ $\quad\quad$ et $\quad\quad$ à $x = L$ $\quad\quad$ $\phi_L = 0$

1- Écrire le modèle mathématique de ce problème physique

2- Calculer la distribution de ϕ en fonction de x par la méthode des volumes finis pour le cas où la vitesse $u = 0{,}1$ m/s,

On donne : la longueur $L = 1$ m, la masse volumique $\rho = 1$ kg/m^3 et le coefficient de diffusion $\Gamma = 0{,}1$ kg/m s.

Remarque : Il est demandé de choisir un maillage composé de **cinq** volumes de contrôle (cellules) espacés de façon identique (maillage uniforme) et utiliser le **schéma de différenciation centrale** pour la discrétisation des termes de flux convectif et de diffusif.

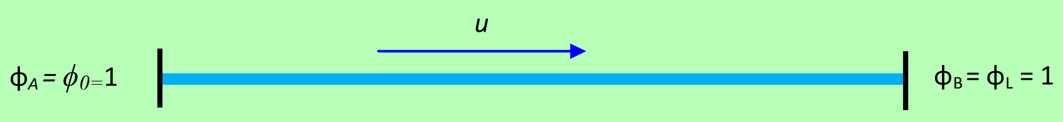

Figure 1 : Diffusion et convection de la quantité de transport ϕ dans une barre 1D et conditions aux limites.

Exercice 2 :

Refaire l'exercice 1 pour les cas suivants :

(a) cas où la vitesse u = 0,1 m/s et comparer les résultats avec la solution analytique

(b) cas où la vitesse u = 2,5 m/s et comparer les résultats avec la solution analytique

$$\frac{\phi - \phi_A}{\phi_B - \phi_A} = \frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{(\rho u x/\Gamma)} - 1}{e^{(\rho u L/\Gamma)} - 1}$$

(c) Recalculer la solution pour le cas où la vitesse u = 2,5 m/s en utilisant un maillage composé de 20 nœuds et comparer les résultats avec la solution analytique.

On donne : la longueur L = 1 m, la masse volumique ρ = 1 kg/m^3 et le coefficient de diffusion Γ= 0,1 kg/m s.

<u>Remarque</u> : Pour les cas (1) et (2) il est demandé de choisir un maillage composé de **cinq** volumes de contrôle (cellules) espacés de façon identique (maillage uniforme) et utiliser le **schéma de différenciation centrale** pour la discrétisation des termes de flux convectif et de diffusif.

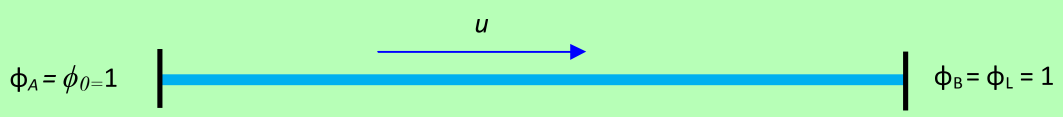

Figure 1 : Diffusion et convection de la quantité de transport ϕ dans une barre 1D et conditions aux limites.

Solution de l'exercice 1 :

1)- <u>Modèle mathématique</u>

-Nous voulons résoudre le problème de diffusion et convection de la quantité ϕ en régime stationnaire dans la géométrie 1D (la barre AB montrée en Fig. 1). Ce problème est régit par les équations :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$$

2)- <u>Résolution du problème par la méthode des volumes finis</u>

Pour la résolution du problème actuel par la méthode des volumes finis en utilisant un maillage de 5 volumes de contrôle, nous réaliserons les **étapes suivantes** :

<u>Étape 1: Génération de maillage</u>

Nous divisons le domaine de calcul en **cinq** volumes de contrôle (Fig. 2). Cela donne $\delta x = 1/5 = 0{,}2$ m.

<u>Étape 2: Discrétisation</u>

- *<u>Nœuds internes</u>*

L'intégration des équations gouvernantes sur le volume de contrôle de la figure 2 donnent respectivement les équations suivantes :

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w \qquad (1)$$

et

$$(\rho A \phi)_e - (\rho A \phi)_w = 0 \qquad (2)$$

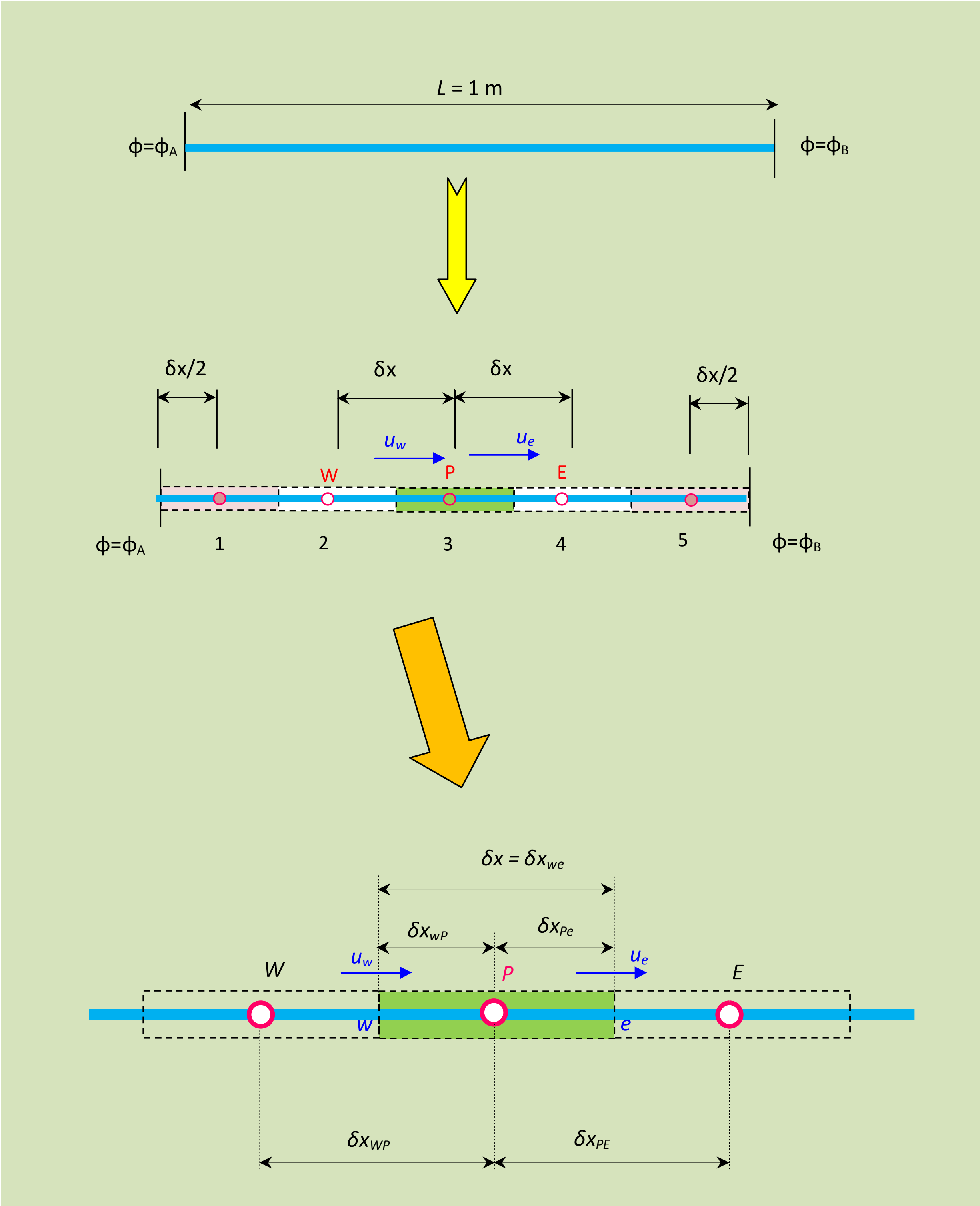

Figure 2 : Domaine de calcul et maillage utilisé pour la discrétisation. Cas de maillage constitué de 5 volumes de contrôle.

Si on désigne par :

$$F = \rho u \qquad \text{et} \qquad D = \Gamma/\delta x$$

Alors les valeurs des variables F et D sur les faces « e » et « w » des volumes de contrôle peuvent s'écrire

$$F_w = (\rho u)_w \qquad \text{et} \qquad F_e = (\rho u)_e$$

et

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \qquad \text{et} \qquad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

Pour simplifier, nous supposons que $A_w = A_e = A$ et nous utilisons l'approche de différenciation centrale pour représenter la contribution des termes de diffusion sur le côté droit, l'équation intégrée (1) peut maintenant être écrite :

$$F_e\phi_e - F_w\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \qquad (3)$$

et l'équation de continuité intégrée (2) comme

$$F_e - F_w = 0$$

En utilisant l'approximation de différenciation centrale, on a

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \qquad \text{et} \qquad \phi_w = \frac{(\phi_W + \phi_P)}{2} \qquad (4)$$

En remplaçant les expressions (4) dans les termes de convectifs (3), on a

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

Nous pouvons réorganiser cette équation et la mettre sous la forme

$$\left(\left(D_w - \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2}\right)\right)\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

qui peut s'écrire comme

$$\left(\left(D_w + \frac{F_w}{2}\right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right) + \left(F_e - F_w\right)\right)\phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right)\phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right)\phi_E$$

En identifiant les coefficients de ϕ_W et ϕ_E comme a_W et a_E, les expressions de **différenciation centrale** pour l'équation de convection-diffusion discrétisée sont :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{5a}$$

avec

$$\begin{cases} a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} \\ a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} \\ a_P = a_W + a_E + \left(F_e - F_w\right) \end{cases} \tag{5b}$$

L'équation de discrétisation (5a) et ses coefficients (5b) s'appliquent aux points nodaux internes 2, 3 et 4, mais les volumes de contrôle 1 et 5 nécessitent un traitement spécial car ils sont adjacents aux limites du domaine. Notons que F = ρu, D = Γ/δx, $F_e = F_w$ = F et $D_e = D_w$ = D partout et les limites du domaine sont désignées par A et B. Alors, de l'équation (5b), on a

$$\begin{cases} a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} = D + \dfrac{F}{2} \\ a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} = D - \dfrac{F}{2} \\ a_P = a_W + a_E + \left(F_e - F_w\right) = 2D \end{cases} \tag{5c}$$

- *Traitement des nœuds aux limites*

- ***Point 1***

Nous intégrons les équations gouvernantes et nous utilisons une différenciation centrale pour les termes de flux diffusif et convectif à travers la face « e » du volume de contrôle 1. La valeur de ϕ est donnée à la face « w » de ce volume de contrôle ($\phi_w = \phi_A = 1$) donc nous n'avons pas besoin de faire toute approximation du terme de flux convectif à cette frontière. Cela donne l'équation suivante pour le nœud 1 :

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - F_A\phi_A = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_A(\phi_P - \phi_A) \qquad (6)$$

- ***Point 5***

Pour le volume de contrôle 5, la valeur sur la face « e » est connue ($\phi_e = \phi_B = 0$). On obtient

$$F_B\phi_B - \frac{F_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_B(\phi_B - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \qquad (7)$$

En réarrangeant ces deux dernières équations et en notant que $D_A = D_B = 2\Gamma / \delta x = 2D$ et $F_A = F_B = F$, nous obtenons les équations discrétisées aux nœuds limites 1 et 5 telles que :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + S_u \qquad (8a)$$

avec le coefficient central

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P \qquad (8b)$$

et

$$\begin{cases} a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} = 0 \\ a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} = D - \dfrac{F}{2} \\ S_P = -\left(2D + F\right) \\ S_u = \left(2D + F\right)\phi_A \end{cases}$$

(pour le nœud 1)

$$\begin{cases} a_W = D_w + \dfrac{F_w}{2} = D + \dfrac{F}{2} \\ a_E = D_e - \dfrac{F_e}{2} = 0 \\ S_P = -\left(2D - F\right) \\ S_u = \left(2D - F\right)\phi_B \end{cases}$$

(pour le nœud 5)

Pour incorporer les conditions aux limites, nous avons donc supprimé le lien vers le côté limite et entré le flux limite à travers les termes sources.

Applications numériques :

Pour u = 0,1 m/s : alors (F = ρu = 0,1, D = $\Gamma/\delta x$ = 0,1/0,2 = 0,5) et les coefficients sont donnés tels que :

Nœud / coefficients	a_W	a_E	S_u	S_p	$a_E = a_W + a_E - S_p$
1 :	0	0,45	1,1 ϕ_A	-1,1	1,55
2, 3 et 4	0,55	0,45	0	0	1
5	0,55	0	0,9 ϕ_B	-0,9	1,45

La forme matricielle de l'ensemble d'équations utilisant $\phi_A = 1$ et $\phi_B = 0$ est

$$\begin{pmatrix} 1,55 & -0,45 & 0 & 0 & 0 \\ -0,55 & 1 & -0,45 & 0 & 0 \\ 0 & -0,55 & 1 & -0,45 & 0 \\ 0 & 0 & -0,55 & 1 & -0,45 \\ 0 & 0 & 0 & -0,55 & 1,45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Étape 3: Résolution du système d'équations discrétisées

La résolution de ce système par la méthode de **Gauss** donne :

$$\begin{cases} \phi_1 = 0,942 \;\; \text{SI} \\ \phi_2 = 0,801 \;\; \text{SI} \\ \phi_3 = 0,628 \;\; \text{SI} \\ \phi_4 = 0,416 \;\; \text{SI} \\ \phi_5 = 0,158 \;\; \text{SI} \end{cases}$$