# Les inéquations variationnelles à un opérateur non-coercif de type obstacle

April 30, 2020

# Contents



## 0.1 Introduction

Les inéquations variationnelles reprèsentent une technique puissante pour étudier de tels problèmes théoriquement et numériquement, et elles ont un grand intéret, car elles modélisent de nombreux problèmes non linéaire tels que le controle impultionnel en économie et en mécanique (gestion de stock, controle de files d'attente, lancement de production, démarrage de centrales thermiques.

On appelle inéquation variationne non-coercive toute inéquation associé à un opérateur non-coercif . On va étudier le problème des inéquations variationnelles à un opérateur non coercif en utilisant au niveau de l'approximation une méthode qui repose sur la notion de sous-solution et qui introduit une grande symétrie dans le traitement du problème discret et du problème continu.

## 0.2 Notations et Hypothèses

Soit $\Omega$ un ouvert bornée de $\mathbb{R}^2$ , à une frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. On considère les fonctions $a_{ij}, a_i$ qui sont suffisamment régulières vérifiant les conditions suivantes:

$$a_{ij}(x), a_i(x) \in C^2\left(\bar{\Omega}\right), i, j = \overline{1,2} \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i(x)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi_0|^2 \;\; ; x \in \bar{\Omega}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, p \geq 2 \tag{1.2}$$

Nous déffinissons un opérateur différentiel du second ordre :

$$A = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x) \tag{1.3}$$

Où la forme blinéaire associée à cet opérateur est définie pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$

par :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0(x)\,uv \right] dx \tag{1.4}$$

Considérons une fonction $f$ telle que :

$$f \in L^{\infty}(\Omega) \tag{1.5}$$

Et un obstacle noté par $\psi$ tel que :

$$\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \tag{1.6}$$

Soit $g$ une fonction régulière définit aux bords telle que :

$$g \in W^{2,\infty}(\Omega) \qquad 2 \leq p < \infty$$

Avec

$$g \leq \psi \tag{1.7}$$

Alors on peut considérer le problème d'inéquation variationnelle de type obstacle suivant :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in K_{(\psi,g)}\ telle\ que : \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad, \forall v \in K(\psi, g) \\ u \leq \psi\ ,\ v \leq \psi \end{cases} \tag{1.8}$$

Avec $K_{(\psi,g)}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide donné par :

$$K_{(\psi,g)} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \;\; \backslash \; v = g \text{ sur } \partial\Omega,\ v \leq \psi \text{ dans } \Omega \right\} \subset H^1(\Omega) \tag{1.9}$$

Dans plusieurs travaux de recherche la forme bilinéaire $a(.,.)$ est généralement fortement coercive c'est à dire $\forall v \in H^1(\Omega)$, $\exists \vartheta > 0$ telle que :

$$a(v,v) \geq \vartheta.\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Pourtant, dans la modélisation des problèmes de contrôle, il est intéressant d'affaiblir l'hypothèse de coercivité et de supposer seulement l'existence d'une constante $\lambda > 0$ telle que :

$$\forall v \;\in\; H^1(\Omega), \quad \underbrace{a(v,v) + \int_{\Omega} \lambda v^2 dx}_{b(v,v)} \geq \vartheta.\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{1.10}$$

$$\tag{1}$$

Dans ce chapitre on va étudier l'inéquation variationnelle associée à un opérateur non coercif. Considérons alors la nouvelle forme bilinéaire $b(u, v)$ qui est **coercive** définit par :

$$b(u,v) = a(u,v) + \lambda(u,v) \qquad \alpha > 0$$

Donc,

$$\begin{aligned} b(u, v-u) &= a(u, v-u) + \lambda(u, v-u) \\ &\geq (f, v-u) + (\lambda u, v-u) \\ &= \Big(\underbrace{f + \lambda u}_{\textit{Le nouveau second membre}}, v-u\Big) \end{aligned}$$

D'où le problème (1.8) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} Trouver\ u \in K_{(\psi,g)}\ telle\ que : \\ b(u, v-u) \geq (f + \lambda u, v-u) \qquad , \forall v \ \in K_{(\psi,g)} \\ u \leq \psi\ ,\ v \leq \psi \end{array} \right. \tag{1.11}$$

## 0.3 Problème continu

Soit $b(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive et soit $\lambda > 0$, sous les notations et les hypothèses précédentes $u$ est une solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{c} b(u, v-u) \geq (f + \lambda u, v-u) \quad , \forall v \ \in K_{(\psi,g)} \\ u \leq \psi\ ,\ v \leq \psi \end{array} \right. \tag{2.1}$$

**Remark 1** *le problème (2.1) est appelé inéquation variationnelle non-coercive qui est aussi une inéquation quasi-variationnelle notée par* ***(I.Q.V)*** *puisque le second membre* $(f + \lambda u)$ *dépend de la solution* $u$*.*

## 0.4 Existence et unicité de la solution continue d'I.V non-coercive

**Theorem 2** *Sous les hypothèses précédentes le problème (2.1) admet une unique solution* $u$*.*

## 0.5 Quelques résultats préliminaires sur l'I.V non-coercive

### 0.5.1 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

**Lemma 3** *Soit $\Sigma$ l'ensemble des sous-solutions d'I.V non-coercive (2.1), c'est à dire l'ensemble des $\mu \in H^1(\Omega)$ tel que :*

$$\begin{cases} b(\mu, v) \leq (f + \lambda\mu, v) \\ \mu \leq \psi \ , \ v \geq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

**Theorem 4** *Sous les hypothèses et les notations précédentes, la solution $u$ du problème (2.1) est la plus grande des sous-solutions solution c'est à dire le plus grand élément de $\Sigma$.*

**Proof.** On a $u$ est une solution de l'I.V non-coercive (2.1), alors :

$$\begin{cases} b(u, \omega - u) \geq (f + \lambda u, \omega - u) \quad , \forall\omega \ \in K_{(\psi,g)} \\ u \leq \psi \ , \ \omega \leq \psi \end{cases}$$

On pose

$$\omega = u - v \qquad\qquad v \geq 0$$

Donc

$$\begin{cases} b(u, -v) \geq (f + \lambda u, -v) \\ u_\alpha \leq \psi \ ; v \geq 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} b(u, v) \leq (f + \lambda u, v) \\ u \leq \psi \quad , v \geq 0 \end{cases}$$

Alors $u$ est une **sous-solution** du problème (2.1) .
Soit :

$$z = \sup_{u \in \Sigma} u$$

$z$ est une sous-solution alors :

$$\begin{cases} b(z, v) \leq (f + \lambda z, v) \\ z \leq \psi \ , v \geq 0 \end{cases}$$

Prenons

$$v = z - u \geq 0$$

Puisque

$$z \geq u$$

Alors :

$$\begin{cases} b(z, z - u) \leq (f + \lambda u, z - u) \\ u \leq \psi \ , \ z \geq u \geq 0 \end{cases} \tag{$\bigstar$}$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} b(u, v-u) \geq (f+\lambda u, v-u) \\ u \leq \psi \ , \ v \leq \psi \end{cases}$$

Posons $v = z \leq \psi$,on trouve :

$$\begin{cases} b(u, z-u) \geq (f+\lambda u, z-u) \\ u \leq \psi \ , \ z \leq \psi \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} b(-u, z-u) \leq -(f+\lambda u, z-u) \\ u \leq \psi \ , \ z \leq \psi \end{cases} \qquad \bigstar\bigstar$$

Par sommation des deux inégalités ($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$) on obtient :

$$\begin{cases} b(z-u, z-u) \leq 0 \\ u \leq \psi \ , \ z \leq \psi \end{cases}$$

Mais comme $b(.,.)$ est fortement coercive alors $\exists \vartheta > 0$ tel que:

$$0 \geq b(z-u, z-u) \geq \vartheta \left\| z-u \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq 0$$

D'où

$$\left\| z-u \right\|_{H^1(\Omega)}^2 = 0 \Longleftrightarrow z-u=0$$

Alors,

$$\begin{aligned} z &= u \\ &= \sup_{u \in \Sigma} u \end{aligned}$$

D'où $u$ est la plus grande des sous-solutions. ∎

**Proposition 5** *Considérons l'application $\delta$ qui est définie comme suit :*

$$\begin{aligned} \delta \quad &: \quad L^{\infty}(\Omega) \rightarrow L^{\infty}(\Omega) \\ (\psi, h) \quad &\rightarrow \quad \delta(\psi, h) = u \end{aligned} \tag{2.3}$$

*Avec*

$$h = f + \lambda u$$

*Où $u$ est une solution continue d'inéquation variaionnelle non-coercive.*

**Proposition 6** *L'application $\delta$ est croissante , concave, linéaire et lipschitzienne de constante 1 et $\forall c > 0$ elle vérifie :*

$$\delta(h, \psi) + c \leq \delta(h + a_0 c, \psi + c) \tag{2.4}$$

**Proof.** On pose

$$\begin{aligned} u &= \delta(h,\psi) \\ &= \delta\left(f+\lambda u,\psi\right) \end{aligned}$$

$u$ est une sous-solution alors :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f+\lambda u, v) \\ u \leq \psi, v \geq 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} a(u,v) + \int\limits_{\Omega} ca_0 v dx \leq (f+\lambda u, v) \ \ + \int\limits_{\Omega} ca_0 v dx \ ,\forall v \ \in K_g \\ u+c \leq \psi + c \ , \ v \geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a(u,v) + a(c,v) \leq (f+\lambda u + ca_0, v) \\ u+c \leq \psi + c \ , \ v \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a(u+c,v) \leq (f+\lambda u + ca_0, v) \\ u+c \leq \psi + c \ , \ v \geq 0 \end{cases}$$

Alors $u+c$ est une sous-solution.

Mais sachant que $\tilde{u} = \delta(f+\lambda u + a_0 c, \psi + c)$ est la plus grande des sous-solutions, c'est à dire :

$$u+c \leq \tilde{u}$$

D'où

$$\delta(f+\lambda u,\psi) + c \leq \delta(f+\lambda u + a_0 c, \psi + c)$$

■

### 0.5.2 Propriété de la monotonie de la solution continue d'I.V non-coercive

On note par $u = \delta\left(f,\psi,g\right) \left(resp. \tilde{u} = \delta\left(\tilde{f},\tilde{\psi},\tilde{g}\right)\right)$ les solutions correspondantes à $\left(\left(f,\psi,g\right) resp. \left(\tilde{f},\tilde{\psi},\tilde{g}\right)\right)$ du problème (2.1) .

**Lemma 7** *Sous les notations précédentes , On a :*

$$Si\ \psi \geq \tilde{\psi}\ ,\ \ f \geq \tilde{f}\ et\ g \geq \tilde{g},\ \ Alors\ \ \delta\left(f,\psi,g\right) \geq \delta\left(\tilde{f},\tilde{\psi},\tilde{g}\right) \tag{2.5}$$

**Proof.** Soit

$$\begin{aligned} v &= \min(0, u-\tilde{u}) \\ &= \begin{cases} 0 & si\ u-\tilde{u} \geq 0 \\ u-\tilde{u} & si\ u-\tilde{u} \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si\ \ u \geq \tilde{u} \\ u-\tilde{u} & si\ \ u \leq \tilde{u} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas où $v$ est négatif ($v \leq 0$), on a :

$$u \leq \tilde{u} \leq \tilde{\psi} \leq \psi$$

C'est à dire que l'obstacle $\psi$ n'est pas actif pour $u$.

Donc, pour cela nous avons :

$$b(u,v) = (f + \lambda u, v) \qquad\qquad puisque\ (u < \psi)$$

Comme on a:

$$\tilde{u} \leq \tilde{\psi}$$

Alors

$$\tilde{u} + v \leq \tilde{\psi}$$

On a $\tilde{u}$ est une sur-solution de ce problème c'est à dire :

$$\begin{aligned} b(\tilde{u}, v) &\geq (f + \lambda \tilde{u}, v) \\ &\geq (f + \lambda u, v) \\ &= b(u,v) \end{aligned}$$

Donc

$$b(\tilde{u}, v) \geq b(u,v)$$

Alors

$$b(\tilde{u} - u, v) \geq 0$$

D'aute part on sait que la forme bilinéaire est fortement coercive c'est à dire :

$$b\,(v,v) \geq \vartheta \left\|v\right\|^2 \geq 0, \quad \vartheta > 0$$

Et on sait que :

$$\begin{aligned} \vartheta \left\|v\right\|^2 &\leq b\,(v,v) \\ &= b(u - \tilde{u}, v) \\ &= -b(\tilde{u} - u, v) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où

$$v = 0$$

Par conséquence,

$$u \geq \tilde{u}$$

c'est à dire on a :

$$\delta(f, \psi, g) \geq \delta\left(\tilde{f}, \tilde{\psi}, \tilde{g}\right)$$

■

On va donner maintenant une propriété de lipschitzianité de la solution continue d'I.V non-coercive par rapport à la condition aux bords $g$.

### 0.5.3 Propriétés de Lipschitzianité de la solution continue d'I.V non-coercive

**Lemma 8** *Soient les deux couple* $(g, \psi), (\bar{g}, \psi)$. *On pose* $u = \delta(g, \psi)$ $(resp. \bar{u} = \delta(\bar{g}, \psi))$ *les solutions correspendantes du problème (2.1) avec* $g \neq \bar{g}$ *.Alors , on a :*

$$\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \quad \|g - \bar{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{2.6}$$

**Proof.** On a :

$$\begin{aligned}
g &= g + \bar{g} - \bar{g} \\
&\leq \bar{g} + |g - \bar{g}| \\
&\leq \bar{g} + \sup_{\partial\Omega} ess\, |g - \bar{g}| \\
&\leq \bar{g} + \|g - \bar{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&\leq \bar{g} + \underbrace{\|g - \bar{g}\|}_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&= \bar{g} + \quad \Lambda
\end{aligned}$$

Et c'est clair que :

$$\psi \leq \psi + \Lambda$$

On a alors :

$$\delta(g, \psi) \leq \delta(\bar{g} + \Lambda, \psi + \Lambda)$$

Grâce à la propriété de l'application $\delta$ et comme $\Lambda > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta(g, \psi) &\leq \delta(\bar{g} + \Lambda, \psi + \Lambda) \\
&= \delta(\bar{g}, \psi) + \Lambda
\end{aligned}$$

D'où

$$\delta(g, \psi) - \delta(\bar{g}, \psi) \leq \Lambda$$

Donc,

$$\|\delta(g, \psi) - \delta(\bar{g}, \psi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda$$

Alors

$$\|u - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \quad \|g - \bar{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

■

### 0.5.4 Régularité de la solution continue

**La régularité de la solution de l'I.V non-coercive (2.1) repose sur le lemme suivant**

**Lemma 9** (**cf**. [**18**])*la solution u du problème (2.1) satisfaite la propriété de la régularité suivante:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \tag{2.7}$$

*Avec* $C > 0$ .

**Lemma 10** *Sous les hypothèses et les conditions précédentes nous avons :*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \tag{2.8}$$

*Où* $u$ *est la solution continue du problème (2.1) et* $C > 0$ .

*D'où*

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \qquad \text{Avec } 2 \leq p \leq \infty$$