

EXERCICE 1:

Un compresseur formé par un récipient, fermé par un piston mobile, contient 2 g de l'hélium (gaz parfait, monoatomique) dans les conditions (P_1, V_1) . On opère une compression adiabatique, de façon réversible, qui amène le gaz dans les conditions (P_2, V_2) . Sachant que $P_1 = 1 \text{ atm}$, $V_1 = 10 \text{ litres}$ et $P_2 = 3 \text{ atm}$. Déterminer :

- Le volume final V_2 ?
- Le travail reçu par le gaz ?
- La variation d'énergie interne du gaz ?
- En déduire l'élévation de température du gaz, sans calculer la température initiale T_1

On donne :

- le rapport des chaleurs massiques à pression et volume constants: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ S.I.}$

Solution 1:

Transformation adiabatique $PV^\gamma = \text{cte}$

a- on a $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ soit $V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ d'où $V_2 = 10 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{1,66}} = 5,161 \text{ litres}$ [$\gamma = 1,66$ pour les gaz monoatomique]

b- Pour une transformation adiabatique on écrit :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \text{ avec } P V^\gamma = \text{cte} = K_A \text{ d'où } W = - \int_{V_1}^{V_2} K_A V^{-\gamma} dV = \left[\frac{P V}{\gamma - 1} \right]_1^2 \quad (1)$$

$P V^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P = \frac{\text{cte}}{V^\gamma} \Rightarrow P V^\gamma = \text{cte}$

$$W = -822 \text{ J}$$

c- La variation de l'énergie interne est égale à :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q = W \text{ (car } Q = 0 \text{)}; \text{ donc } U_2 - U_1 = 822 \text{ J}$$

d- Pour n moles de gaz parfait, on a :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W = n C_v (T_2 - T_1) \quad (2)$$

or $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et $C_p - C_v = R$ (pour une mole) $\Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (*)$

d'où (2) $\Rightarrow W = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$ (3) [En remplaçant (*) dans (2) on trouve (3)]

ou bien $(T_2 - T_1) = \frac{W(\gamma - 1)}{nR}$ $(T_2 - T_1) = 132^\circ \text{K}$

Autre méthode : Dans (1) on remplace $PV = nRT$ et on trouve (3)

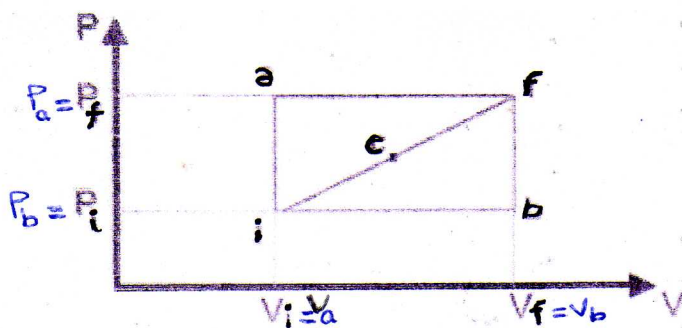


Schéma Exo 2

EXERCICE 2:

Pour vérifier que la quantité de chaleur est une fonction qui dépend du chemin suivi, on considère un gaz parfait diatomique ($C_V = 5/2 R$) qui est porté réversiblement d'un état initial i à un état final f par 3 chemins différents $i \rightarrow a \rightarrow f$, $i \rightarrow b \rightarrow f$, $i \rightarrow c \rightarrow f$.

- $i \rightarrow a \rightarrow f$: isochore suivie d'une isobare
- $i \rightarrow b \rightarrow f$: isobare suivie d'une isochore
- $i \rightarrow c \rightarrow f$: chemin rectiligne direct.

Calculer la quantité de chaleur échangée dans les trois cas en fonction de la température de l'état initial T_i sachant que : $P_f = 2 P_i$ et $V_f = 2 V_i$. Conclusion ?

Solution 2:

La quantité de chaleur élémentaire peut s'exprimer en fonction de deux variables que l'on choisira. Les trois formes classiques sont (pour 1 mole) :

$$\delta Q = C_V dT + l dT$$

$$\delta Q = C_P dT + h dT$$

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV$$

♦ $i \rightarrow a \rightarrow f$: isochore suivie d'une isobare

$$Q = \int_i^f \delta Q = \int_i^a C_V dT + \int_a^f C_P dT = C_V (T_a - T_i) + C_P (T_f - T_a) \quad \text{①} \Rightarrow \text{On doit remplacer } T_f \text{ et } T_a \text{ en fonction de } T_i$$

En f on a $P_f V_f = R T_f$ et en i on a $P_i V_i = R T_i$ d'où $T_f = 4 T_i$

De même en a on a $P_f V_i = R T_a$ (car $P_f = P_a$ isobare et $V_a = V_i$ isochore)

Dans ① on a $Q = C_V (2 T_i - T_i) + C_P (4 T_i - 2 T_i)$; or $C_V = \frac{5}{2} R$ et $C_P = \frac{7}{2} R$

d'où

$$Q = \frac{15}{2} R T_i$$

Détails pour les calculs de T_f et T_a

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transformation} \\ \text{isochore } T = \text{cst} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_i V_i = R T_i \\ P_f V_i = R T_a \end{array} \Rightarrow \frac{T_i}{P_i} = \frac{T_a}{P_f}$$

$$P_f = 2 P_i \text{ donc } \frac{T_i}{P_i} = \frac{T_a}{2 P_i}$$

$$\Rightarrow T_a = \frac{T_i \cdot 2 P_i}{P_i}$$

$$T_a = 2 T_i$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Transformation} \\ \text{isobare } P = \text{cst} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P V_i = R T_a \\ P V_f = R T_f \end{array} \Rightarrow \frac{T_a}{V_i} = \frac{T_f}{V_f}$$

$$T_a = 2 T_i \Rightarrow \frac{2 T_i}{V_i} = \frac{T_f}{2 V_i}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{2 T_i \cdot 2 V_i}{V_i}$$

$$T_f = 4 T_i$$

♦ $i \rightarrow b \rightarrow f$: isobare suivie d'une isochore On trouve $Q = \frac{17}{2} R T_i$ De la même façon on détermine Q pour le 2^e chemin.

♦ $i \rightarrow c \rightarrow f$: chemin rectiligne direct.

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV = C_V \frac{V}{R} dP + C_P \frac{P}{R} dV$$

or $P = k V$ car c'est une transformation linéaire

$$\delta Q = C_V \frac{V}{R} k dV + C_P k \frac{V}{R} dV = (C_V + C_P) \frac{k}{R} V dV$$

$$Q = (C_V + C_P) \frac{k}{R} V \left[\frac{V^2}{2} \right]_{V_i}^{V_f} = \frac{3}{2} (C_V + C_P) \frac{1}{R} k V_i^2$$

or $k V_i = R T_i$ d'où

$$Q = \frac{18}{2} R T_i$$

Conclusion : δQ n'est pas une différentielle totale exacte.

EXERCICE 3 :

Une ensileuse fonctionne selon un cycle ABCA décrit comme suit :

- 1 - Le gaz parfait est amené de l'état A (P_A, V_A, T_A) à l'état B (P_B, V_B, T_B) par une transformation à volume constant. Sachant que $P_B = 2 P_A$, calculer T_B en fonction de T_A ?
- 2 - Le gaz subit ensuite une détente isotherme qui l'amène à un état C (P_C, V_C, T_C) de telle sorte que $P_C = P_A$. Calculer V_C en fonction de V_A ?
- 3 - Le gaz revient alors à son état initial A par une transformation à pression constante.
 - a - Faire un schéma du cycle ABCA dans le diagramme de CLAPEYRON.
 - b - Calculer le travail total W échangé par le gaz pendant le cycle ABCA avec le milieu extérieur. Exprimer ce travail en fonction des variables P_A et V_A

1°) D'après la loi des gaz parfaits on a :

$$n R = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_A V_A}{T_A} \text{ or } P_B = 2 P_A \text{ et } V_B = V_A$$

$$\text{D'où } 2 \frac{P_A V_A}{T_B} = \frac{P_A V_A}{T_A} \Rightarrow T_B = 2 T_A$$

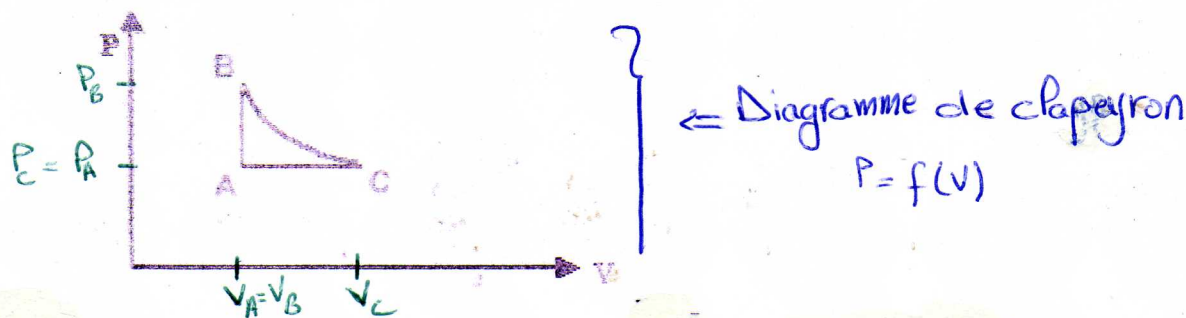
2°) De B à C, le gaz a subi une transformation isotherme on écrit :

$$n R = \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_B V_B}{T_B} \text{ Or } P_C = P_A = \frac{P_B}{2} \text{ et } T_C = T_B$$

$$\frac{P_B \cdot V_C}{2 T_B} = \frac{P_B \cdot V_B}{T_B} \Rightarrow V_C = \frac{2 T_B \cdot P_B \cdot V_B}{T_B \cdot P_B} = 2 V_B$$

On a déjà $V_B = V_A$

Donc : $V_C = 2 V_A$



3°)

a-

b- Soit W le travail fourni au gaz pendant le cycle :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

avec :

$W_{AB} = 0$ transformation isochore ;

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} P dV = nRT_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = -P_B V_B \ln \frac{V_C}{V_B} = -2 P_A V_A \ln 2 \text{ car la transformation est isotherme ;}$$

$$W_{CA} = -P_A (V_A - V_C) = P_A V_A \text{ transformation isobare ;}$$

$$\text{Donc : } W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = P_A V_A (1 - 2 \ln 2) = -0,4 P_A V_A$$

Conclusion : Ce travail est négatif : c'est donc le gaz qui fournit du travail au milieu extérieur.

Le cycle parcouru dans le sens $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ est moteur.

EXERCICE 4

En hiver et afin d'éviter le gel, on chauffe une serre contenant 812 g d'air (gaz supposé parfait) dont la température s'élève de 2°C à 16°C . Calculer :

a - la variation d'énergie interne de l'air au cours de cet échauffement ?

b - la quantité de chaleur reçue par le gaz, si ce dernier a fourni un travail de 846,4 joules.

On donne: La masse molaire de l'air $M = 29 \text{ g/mole}$, $R = 8,32 \text{ S.I.}$;

Le rapport des chaleurs massiques de l'air $\gamma = C_P / C_V = 1,4$

Solution 1 :