Équation de Bernoulli :

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^{\alpha} = 0 \quad \text{---}(1)$$

on pose que $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}} \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)\dfrac{y'}{y^{\alpha}}$

$y' = \dfrac{y^{\alpha} z'}{1-\alpha}$ on remplace dans (1). on obtient

$$\frac{y^{\alpha} z'}{1-\alpha} + a(x)\,y + b(x)\,y^{\alpha} = 0.$$

en $\dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)\dfrac{y}{y^{\alpha}} + b(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)\dfrac{1}{y^{\alpha-1}} + b(x) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{z'}{1-\alpha} + a(x)\,z + b(x) = 0$ c'est une éq diff. d'ordre 1.

$$\boxed{\frac{z'}{1-\alpha} + a(x)\,z = -b(x)}$$

Exo3 :

1. $x^2 y' = x y - y^2 \Leftrightarrow x^2 y' - xy + y^2 = 0$ éq Ber.

avec $\alpha = 2$.

$x^2 \dfrac{y'}{y^2} - x\dfrac{y}{y^2} + 1 = 0$ on pose $z = \dfrac{1}{y} = y^{-1}$

$z' = -y' y^{-2} = -\dfrac{y'}{y^2}$

$$-x^2 z' - x z + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 z' + xz = 1.$

$\cancel{-x^2 z' - xz = 0 \Leftrightarrow}$

$x^2 z' + xz = 0 \Rightarrow x^2 z' = -xz$

$\Leftrightarrow x\dfrac{dz}{dx} = -z \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$

$$\boxed{z = C\,x^{-1}}$$