

TD N°2 D'Analyse
Promotion: 1^{ère}ST
Equations différentielles

Exercice 1 Soit l'équation différentielle: $y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2$ (1).

- 1) Déterminer la constante $a > 0$ telle que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de l'équation (1).
- 2) Intégrer l'équation (1) en utilisant le changement de fonction $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$.

Exercice 2 Soit l'équation différentielle: $xy' + 5y = (2x + 5)e^{2x}$ (E).

- 1) Vérifier que la fonction $y_0(x) = e^{2x}$ est une solution particulière de (E).
- 2) Donner la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes:

- 1) $x^2y' = xy - y^2$, 2) $xy' = y + x \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, 3) $y' \cos x + y \sin x = \cos x$.

Exercice 4 1) Intégrer l'équation $y'' \cos x + y' \sin x - y \cos^3 x = 0$ sachant qu'elle admet une solution du type $e^{a \sin x}$.

- 2) Soit l'équation différentielle: $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ (1). Déterminer $k > 0$ pour que $y = x^k$ soit une solution de l'équation (1). On pose $y(x) = x^k z(x)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ? En déduire les solutions de l'équation (1).

- 3) Trouver toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y'(x) + y(-x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Intégrer les équations différentielles suivantes:

- 1) $y'' + y = 3 \cos 3x$, 2) $y'' - y' = -2 \sin x$, 3) $y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{2x}$, 4) $y'' - 2y' + y = \operatorname{sh} x$.