University of Annaba–"Department of Metallurgy"
Master 1 of "Mise en Forme" **2019–2020**

Analyse Numerique et Programmation

First Exam: 1.30

Remarque.:

- L'utilisation des Télephones portables et calculatrices est interdite
- Le presentation de la réponse est comptée sur 2.0pts

Exercice 1. (Questions de Cours)

1. Citer deux modeles mathematiques qui representent des phenomenes physiques
2. Quels sont les principes des methodes de Differences et Element Finis.
3. Quels sont les etapes a suivre pour resoudre un probleme en Mathematiques Appliquees en commencant par le phynomene physique ?
4. Donner une definition pour les fonctions chapeaux en elements finis.

Exercice 2. Donner une approximation par Differences Finies pour les problemes suivants:

1. Premier probleme:
$$-u''(x) + \exp(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
avec $u(0) = 1$ et $u(1) = 0$.
2. Deuxieme probleme:
$$-(1+x^2)u''(x) + u'(x) + \frac{u(x)}{1+x} = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$
avec $u'(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

Corrigé Examen

Barème

1. Questions de Cours: Q1(1+1) +Q2(2+2)+Q3(4)+Q4(1)
2. Probleme 1: 3,5 pt
3. Probleme 2: 3,5 pt
4. Presentation de copie: 2 points

Solution Exercice 1.

1. Citer deux modeles mathematiques qui representent des phenomenes physiques
   (a) Equation de la chaleur qui represente la diffusion de la chaleur
   $$u_t - \Delta u = f$$
   (b) Equation d'onde qui represente la propagation d'une onde
   $$u_{tt} - \Delta u = f$$
2. Quels sont les principes des methodes de Differences et Element Finis.
   (a) Differences finies: Subdivision de domaine en elements simples et l'approximation des derivees dans des points de maillages.
   (b) Elements finis: Subdivision de domaine en elements simples et l'approximation des formulations faibles pour les problemes
3. Quels sont les etapes a suivre pour resoudre un probleme en Mathematiques Appliquees en commencant par le phynomene physique ?: Phynomene Physique, Modelisation, L'etude Mathematique, L'approximation Numerique, Programmation, Validation des Resultats
4. Donner une definition pour les fonctions chapeaux en elements finis. Sont des fonctions lineaires par morceaux.

Solution Exercice 2.

Probleme 1. I will consider here the uniform mesh $h = 1/(M+1)$, with $M \in \mathbb{N}^\star$. The mesh points are denoted by, for $i = 0, \ldots, M+1$

$$x_i = ih \tag{3}$$

Replacing now x by x_i in (1) to get

$$-u_{xx}(x_i) + \exp(x_i)u(x_i) = f(x_i). \tag{4}$$

The term $u_{xx}(x_i)$ can be approximated using the three point central scheme

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}. \tag{5}$$

We will have then the scheme:

$$-\frac{u^n_{i+1} - 2u^n_i + u^n_{i-1}}{h^2} + \exp(x_i)u_i = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, M \tag{6}$$

with $u_0 = 1$ and $u_{M+1} = 0$.
The scheme (6) leads to the following linear system:

$$(\frac{1}{h^2}A + B)U = F, \tag{7}$$

where

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_M)^T, \tag{8}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$B = \begin{pmatrix} \exp(x_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \exp(x_2) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x_3) & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \exp(x_M) \end{pmatrix} \tag{10}$$

and

$$F = (f(x_1) + \frac{1}{h^2}, f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_M))^T. \tag{11}$$

Probleme 2. I will consider here the uniform mesh $h = 1/(M+1)$, with $M \in \mathbb{N}^\star$. The mesh points are denoted by, for $i = 0, \ldots, M+1$

$$x_i = ih \tag{12}$$

Replacing now x by x_i in (1) to get

$$-(1+x_i^2)u''(x_i) + u'(x_i) + \frac{u(x_i)}{1+x_i} = f(x_i). \tag{13}$$

The term $u_{xx}(x_i)$ can be approximated using the three point central scheme (5). The term $u_x(x_i)$

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}. \tag{14}$$

We will have then the scheme:

$$-(1+x_i^2)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{u_i}{1+x_i} = f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, M \tag{15}$$

with $u_0 = u_1$ and $u_{M+1} = 0$.

The scheme (15) leads to the following linear system:

$$(\frac{1}{h^2}A + \frac{1}{h}B + C)U = F, \tag{16}$$

where

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_M)^T, \tag{17}$$

$$A = \begin{pmatrix} (1+x_1^2) & -(1+x_1^2) & 0 & \ldots & 0 \\ -(1+x_2^2) & 2(1+x_2^2) & -(1+x_2^2) & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -(1+x_M^2) & 2(1+x_M^2) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x_2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+x_3} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{1+x_M} \end{pmatrix} \tag{20}$$

and

$$F = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_M))^T. \tag{21}$$