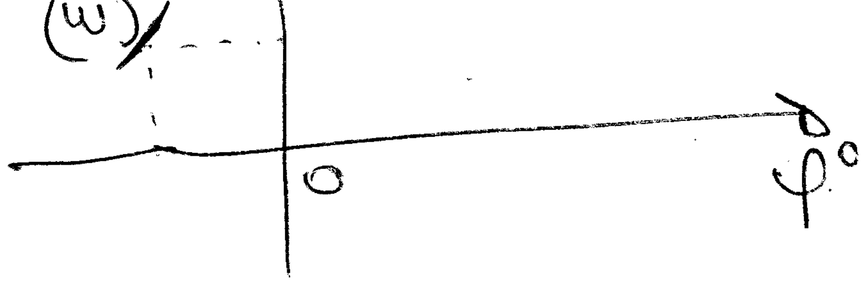
DIAGRAMMES ET ABAQUE DE BLACK (1)

1) Définition du diagramme de Black.

Dans le plan de Black, on représente une réponse en fréquences $L(j\omega)$ en portant en abscisse l'argument φ de $L(j\omega)$, exprimé en degré et en ordonnée le module A de $L(j\omega)$ exprimé en décibels. La courbe obtenue appelée diagramme de Black ~~est graduée en pulsations ω. Un tel~~ ou lieu de transfert dans le plan de Black (ou lieu de Black) est gradué en pulsations ω. Un tel lieu est d'une utilisation très commode, car un changement du gain K d'un système se traduit par une translation parallèle à l'axe des ordonnées. La multiplication de plusieurs réponses en fréquences se réduit d'autre part à une addition vectorielle.



2) Construction et allure des diagrammes de Black :

C'est à partir des diagrammes de Bode d'une réponse en fréquences $L(j\omega)$ qu'il est le plus commode de tracer son diagramme de Black.

Traiter les exercices TD N°5

Ex 1 $T_1(j\omega)$ ~~et~~ $T_2(j\omega)$ et $T_3(j\omega)$

Ex 3 $$T(p) = \frac{20}{p} \cdot \frac{1}{1+p} \cdot \frac{1+0{,}66p}{1+0{,}4p}$$

3) Abaque de Black :

De la réponse en fréquences en boucle ouverte $L(j\omega)$ d'un système asservi l'abaque de Black permet de déduire pour chaque pulsation ω le module L_{dB} et l'argument φ déphasé de la réponse en fréquences du système asservi à retour unitaire équivalent au système donné :

$$F_u(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$$

Si l'on écrit $L(j\omega)$ sous forme Exponentielle: ②

$$L(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(\omega) = |L(j\omega)| \\ \varphi = \arg L(j\omega) \end{cases}$$

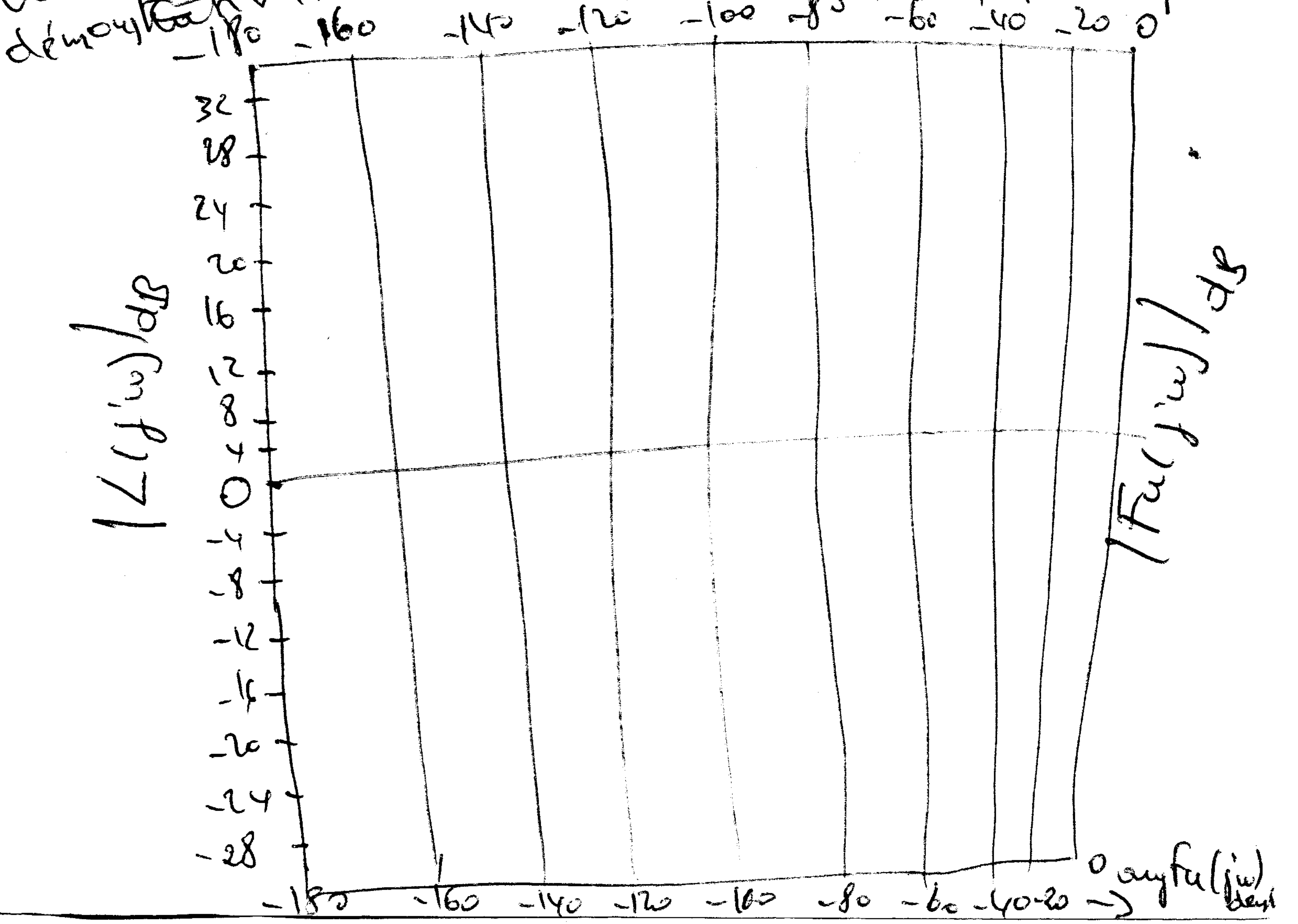
$Fu(j\omega)$ s'écrit sous la forme:

$$Fu(j\omega) = B(\omega)\, e^{j\psi}$$

$$\text{avec } B(\omega) = |Fu(j\omega)| = \frac{A}{(1 + A^2 + 2A\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$\psi = \arg Fu(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sin\varphi}{A + \cos\varphi}$$

Voir démonstration.



les ~~noté~~ nombres situés à l'intérieur du cadre ~~..~~
correspondent aux contours $|F_u(j\omega)|_{dB}$.
L'ABaque de Black est donc obtenu en traçant
dans le plan de Black :
- les lieux des points pour lesquels :

$$20 \log_{10} B = \lambda_{dB} = cte$$

lieux appelés contours d'Amplitudes
- les lieux des points pour lesquels :

$$\operatorname{Arctg} \frac{\sin \varphi}{A + \cos \varphi} = \psi^{\circ} = cte$$

lieux appelés contours de phase.
Ces lieux sont constitués par deux familles
de courbes orthogonales, périodiques de
période 360°. En général on représente celles-ci
en se limitant au domaine 0, -180° pour
ψ, qui est pratiquement le plus utilisé.
Le domaine -180°, -360° est obtenu à partir
du domaine 0, -180° en faisant une symétrie
par rapport à l'axe vertical d'abscisse
-180°.

Demonstrație:

$$F_u(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} = \frac{A(\omega)\, e^{j\varphi}}{1+A(\omega)\, e^{j\varphi}}$$

$$= \frac{A(\cos\varphi + j\sin\varphi)}{1 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi}$$

$$= \frac{A[\cos\varphi + j\sin\varphi](1 + A\cos\varphi - jA\sin\varphi)}{(1 + A\cos\varphi)^2 + A^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{A\cos\varphi + A^2\cancel{\cos^2\varphi} - A^2 j\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} + Aj\sin\varphi + A^2 j\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} + A^2\cancel{\sin^2\varphi}}{1 + A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi + 2A\cos\varphi}$$

$$= \frac{A\cos\varphi + A^2 + jA\sin\varphi}{1 + A^2 + 2A\cos\varphi}$$

$$= \frac{A\cos\varphi + A^2}{1 + A^2 + 2A\cos\varphi} + j\,\frac{A\sin\varphi}{1 + A^2 + 2A\cos\varphi}$$

α

(2

$$\left[\frac{(A\cos\varphi + A^2)^2 + A^2\sin^2\varphi}{(1+A^2+2A\cos\varphi)^2}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{(A^2\cos^2\varphi + A^4 + 2A^3\cos\varphi + A^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{1+A^2+2A\cos\varphi}$$

$$= \frac{(A^2 + A^4 + 2A^3\cos\varphi)^{1/2}}{1+A^2+2A\cos\varphi}$$

$$= \frac{A(1+A^2+2A\cos\varphi)^{1/2}}{1+A^2+2A\cos\varphi} =$$

$$\boxed{\frac{A}{(1+A^2+2A\cos\varphi)^{1/2}} = B(\omega)}$$

de (α) on tire !

$$\psi = \mathrm{Arctg}\ \frac{\cancel{A}\sin\varphi}{1+A^2+2A\cos\varphi} \cdot \frac{1+\cancel{A^2+2A\cos\varphi}}{\cancel{A}(A+\cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \mathrm{Arctg}\ \frac{\sin\varphi}{A+\cos\varphi}.}$$