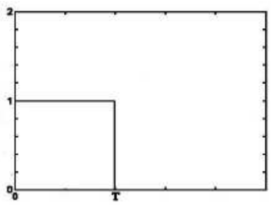
Université Badji Mokhtar de Annaba
Faculté des Sciences de l'ingéniorat
Département d'Electronique

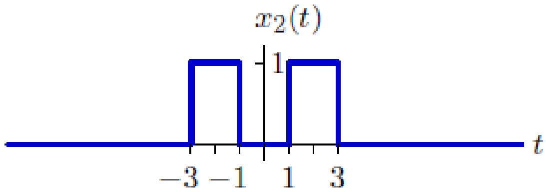
Section : S4 Auto
Module : Théorie du Signal   Devoir 2
Date : 2019/2020

Ex 1 : Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

a) $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



b)



c) $rect(t)\, e^{j6\pi t}$

Réponse :

a)

$$X(f) = \int_0^T 1.e^{-j2\pi ft}dt = -\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi fT} - 1\right]$$
$$= \frac{e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} \cdot 2j \cdot \sin(\pi fT) = T \cdot e^{-j\pi fT}\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$
$$X(f) = Te^{-j\pi fT}\sin c(fT)$$

b)

$$X(f) = \int_{-3}^{-1} 1 \cdot e^{-j2\pi ft}dt + \int_1^3 1 \cdot e^{-j2\pi ft}dt$$
$$= \cdots$$

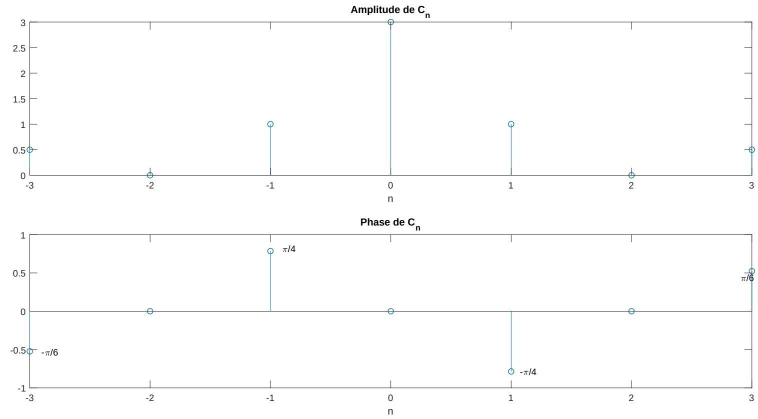
c)

$$x(t) = rect(t) \rightleftharpoons X(f) = sinc(f)$$
$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons X(f - f_0)$$

Ex 2 : Considérons le spectre d'un signal périodique sous forme des coefficients de la série Fourier.

a) Déterminer la fréquence fondamentale de ce signal.

b) Ecrire le signal $x(t)$ avec les coefficients de la série Fourie. Simplifier la réponse en terme de sinus/cosinus.



Réponse :

En utilisant les relations d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

a) $\omega_0 = 1\,rad/\sec$ à partir de la figure.

b)

$$C_0 = 3,\ C_1 = e^{-j\pi/4},\ C_{-1} = e^{j\pi/4}$$
$$C_2 = 0; C_{-2} = 0$$
$$C_3 = 0.5e^{j\pi/6},\ C_{-3} = 0.5e^{-j\pi/6}$$
$$x(t) = 3 + e^{-j\pi/4}e^{j\omega_0 t} + e^{j\pi/4}e^{-jt} + 0.5e^{j\pi/6}e^{j3t}$$
$$0.5e^{-j\pi/6}e^{-j3t}$$
$$x(t) = 3 + 2\cos\left(t - \pi/4\right) + \cos\left(3t + \pi/6\right)$$

Ex 3 : Cacluler les coefficients complexes de la série de Fourier

$$x(t) = 3\exp(-5t) \ \ pour\ 0 \leq t \prec 10\,s,\ et\ x(t) = x(t+10)$$

Réponse :

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-j\omega_0 kt}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-j2\pi\frac{k}{T_0}t}dt = \frac{1}{10}\int_0^{10} 3e^{-5t}e^{-j2\pi\frac{k}{10}t}dt$$
$$= \frac{1}{10}\,\frac{3e^{-\left(5+j\frac{2\pi k}{10}\right)t}}{-\left(5+j\frac{2\pi k}{10}\right)}\Bigg|_0^{10} = \frac{3\left(1-e^{-50}\right)}{50+j2\pi k}$$

Bonne chance

Formules utiles

La transformée de Fourier (T.F) d'un signal $x(t)$ est donnée par :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

Pour un signal $x(t)$ périodique de période T_0 (donc de fréquence fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$).
La représentation de $x(t)$ en séries de Fourier (forme exponentielle) est donnée par :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}$$

où

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-j\omega_0 kt}dt$$

Pour les signaux réels ($x(t) \in R$), la décomposition en séries de Fourier (forme trigonométrique) est donnée par :

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(\omega_0 kt) + b_k\sin(\omega_0 kt)\}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt, \qquad \textit{et pour } k \neq 0$$
$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(\omega_0 kt)\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(\omega_0 kt)\,dt$$