Chapitre 2 : Analyse de Fourier

Prof. M. Ramdani

Département d'Electronique
BP. 12, Sidi Amar
23000, Annaba, Algérie

Matière : Théorie du Signal
S4 Automatique
Mars 2020

Plan

Représentation fréquentielle des signaux

Représentation fréquentielle des signaux

Pourquoi la représentation fréquentielle ?

En général, l'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet pas d'interpréter correctement l'information.
Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

Qu'est ce qu'une fréquence ?

- La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée.
- C'est donc l'inverse de la période $f = 1/T$
- La fréquence est mesurée en Hertz = (1/seconde).

Représentation fréquentielle des signaux

Pourquoi la représentation fréquentielle ?

En général, l'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet pas d'interpréter correctement l'information.
Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

Qu'est ce qu'une fréquence ?

- La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée.
- C'est donc l'inverse de la période $f = 1/T$
- La fréquence est mesurée en Hertz = (1/seconde).

La représentation de Fourier ?

La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet d'établir une dualité entre deux représentations différentes d'un signal mais complémentaires au niveau de l'interprétation des résultats.

Représentation fréquentielle des signaux -1-

Quelques applications de la transformée de Fourier

1. Equations différentielles et filtrage
2. Transmissions analogiques et numériques
3. Interprétation de l'échantillonnage des signaux en vue du traitement numérique
4. Analyse, synthèse et reconnaissance de la parole
5. Analyse en fréquence des sons et de la musique
   MP3 = Analyse de Fourier+filtrage
6. Identification des caractéristiques d'un système linéaire
   Par exemple suppression d'échos, sismographie, signaux biologiques déformés
7. Nouveaux procédés de radiodiffusion et télédiffusion (OFDM)
8. Réseaux sans fils, Wireless Sensor Networks (WSN)
9. Systèmes d'aide au diagnostic médical
10. Systèmes de surveillance et de poursuite

Exemple application : Surveillance des machines tournantes

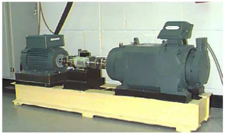


Figure: Stand experimental pour l'analyse vibratoire

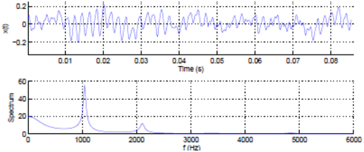


Figure: Machine sans défaut

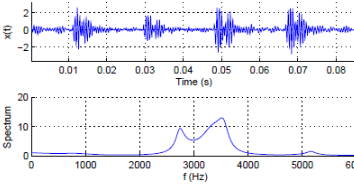


Figure: Défaut de roulement

Exemple application : Surveillance des machines tournantes

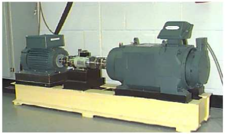


Figure: Stand experimental pour l'analyse vibratoire

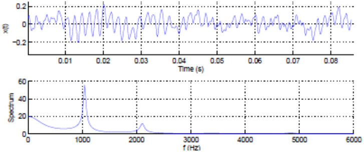


Figure: Machine sans défaut

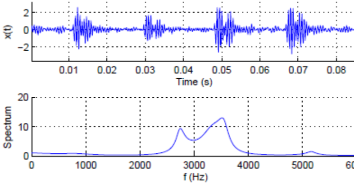
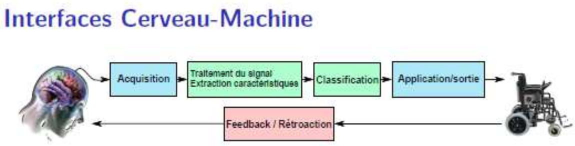
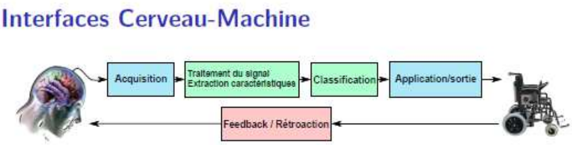


Figure: Défaut de roulement

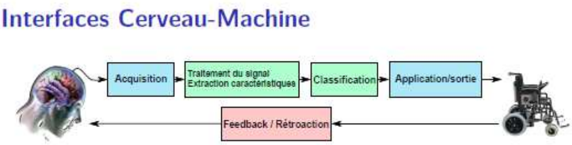
On constate qu'il y a une différence entre les spectres des deux signaux, ce qui permet de déceler la présence de défauts mécaniques par une analyse des vibrations.


Interfaces Cerveau-Machine
Acquisition
Traitement du signal
Extraction caractéristiques
Classification
Application/sortie
Feedback / Rétroaction



Objectifs

- Permettre une communication du verveau vers la machine
- Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau



Objectifs

- Permettre une communication du verveau vers la machine
- Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau

Applications

- Moyens de communication pour des patients
- Contrôle d'un engin robotisé
- Jeux vidéo, téléphone portable ...

Principe

- Extraction à partir des signaux des caractéristiques permettant de reconnaître des tâches mentales
- On estime la puissance d'un signal dans une ou plusieurs **bandes de fréquence**

Transformée de Fourier : Définition et existence

Transformée de Fourier : Définition et existence

Definition 1 (Transformée de Fourier) Soit un signal $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par :

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = < x, \exp(j2\pi ft) > = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\,dt \tag{1}$$

Definition 2 (Transformée de Fourier inverse) On appelle transformée de Fourier inverse la relation :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = < X, \exp(-j2\pi ft) > = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\mathrm{e}^{j2\pi ft}\,df \tag{2}$$

Transformée de Fourier : Définition et existence

Definition 1 (Transformée de Fourier) Soit un signal $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par :

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = < x, \exp(j2\pi ft) > = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt \tag{1}$$

Definition 2 (Transformée de Fourier inverse) On appelle transformée de Fourier inverse la relation :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = < X, \exp(-j2\pi ft) > = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df \tag{2}$$

1. La TF existe si l'intégrale (1) existe, c'est-à-dire si $x(t)$ est une fonction bornée et absolument intégrale donc si $\int |x(t)| dt$ existe.
2. La dimension de la variable f est $|t|^{-1}$ si $x(t)$ est une fonction de t.
3. On note $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ et $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$, ou de façon abrégée:

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

Transformée de Fourier : Autres formulations

Si on introduit

$$\omega = 2\pi f \ \left({}^{rad}/_{s} \right)$$

on obtient :

Transformée de Fourier : Autres formulations

Si on introduit

$$\omega = 2\pi f \left({}^{rad}/_{s} \right)$$

on obtient :

La transformée de Fourier

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (3)$$

La transformée de Fourier inverse

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad (4)$$

Propriétés de la transformée de Fourier

On énonce ci-dessous quelques propriétés importantes consernant la TF.
Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ admettant pour transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$, respectivement, c-à-d $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ et $y(t) \rightleftharpoons Y(f)$ on peut vérifier les propriétés suivantes :

Linéarité :

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \rightleftharpoons \alpha X(f) + \beta Y(f)$$

où α et β sont deux coefficients.

Changement d'échelle sur t :

$$x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

On peut noter le cas particulier : $x(-t) \rightleftharpoons X(-f)$

Décalage temporel de t_0 (translation sur t :

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Propriétés de la transformée de Fourier -1-

Décalage fréquentiel de f_0 (translation sur f ou modulation:

$$x(t)\, e^{j2\pi f t} \rightleftharpoons X(f - f_0)$$

Complexe conjugé : $x^*(t) \rightleftharpoons X^*(f)$

Dérivation temporelle : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j2\pi f)^n X(f)$

Convolution (théorème de Plancherel):

$$x(t) * y(t) \rightleftharpoons X(f)\, Y(f)$$
$$x(t)\, y(t) \rightleftharpoons X(f) * Y(f)$$

Notons que la **convolution** entre un signal $x(t)$ et un signal $h(t)$ est définie par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau)\, d\tau \tag{5}$$

Propriétés de la transformée de Fourier -2-

Parité :

$x(t)$	$X(f)$
réelle paire	réelle paire
réelle impaire	**imaginaire** impaire
imaginaire paire	imaginaire paire
imaginaire impaire	**réelle** impaire

Il faut noter que la TF conserve la parité; c-à-d la nature **réelle** ou **imaginaire** n'est pas changée. Cependant, pour une fonction impaire, la nature est modifiée.

Transformée d'un signal réel

$X(f)$ est une fonction qui est indépendante du temps. C'est une fonction complexe que l'on peut écrire sous la forme **module** et **phase** : $X(f) = |X(f)|\exp(j\phi(f))$ ou sous la forme de partie réelle et de partie imaginaire :
$X(f) = \mathrm{Re}(X(f)) + j\mathrm{Im}(X(f))$ avec

$$\mathrm{Re}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt \ \ et \ \ \mathrm{Im}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt$$

A l'origine de la transformée de Laplace, on trouve l'idée que, si une fonction $x(t)$ n'est pas sommable en valeur absolue, il est néanmoins intéressant de définir la transformée de Fourier du produit $x(t)\, e^{-\sigma t}$, du moins s'il existe un nombre réel σ tel que le produit ci-dessus soit sommable en valeur absolue et l'intégrale suivante converge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t)\, e^{-\sigma t} \right| dt$$

On définit alors la transformée de Laplace *bilatérale* $X(s)$ de $x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt \qquad (6)$$

où s est une variable complexe $s = \sigma + j\omega$

Exemple 1 :

On considère le signal $x(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-{}^{t}/_{\tau}\right)u(t)$

où $u(t)$ est l'échelon unitaire. On cherche à représenter X(f).

Calcul de X(f)

Par définition, on écrit :

$$\begin{aligned} X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt \\ &= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty}\exp(-t/\tau)\exp(-j2\pi ft)\,dt \\ &= \frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-\left(j2\pi ft + t/\tau\right)\right)dt \\ &= \frac{1}{\tau}\left[\frac{\exp(-(j2\pi ft+t/\tau))}{-(j2\pi f+1/\tau)}\right]_{0}^{+\infty} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f\tau}$$

Représentation de $X(f)$

$X(f)$ est une fonction complexe que l'on peut représenter par son module et sa phase; $\mathrm{X}(\mathrm{f}) = |\mathrm{X}(\mathrm{f})|\exp(\phi(\mathrm{X}(\mathrm{f})))$

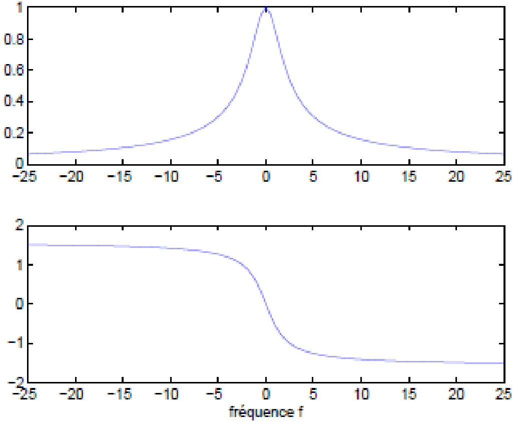
- Le module est calculé selon sa définition :

$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^{*}(f)} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f\tau)^{2}}}$$

- L'argument, par définition, est égal à:

$$\phi\left(X\left(f\right)\right) = -\arctan\left(2\pi f\tau\right)$$

est une fonction impaire de f



Exemple 2 :

Effectuons le calcul de la transformée de Fourier de $x(t) = Acos(2\pi f_0 t)$, en utilisant la relation d'Euler : $\begin{cases} e^{\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2j} \end{cases}$

on a donc : $x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right]$

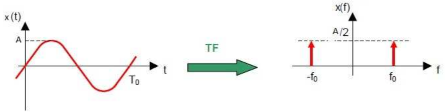
Sachant que la transformée de Fourier d'une fonction exponentielle complexe est de la forme:

$$F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(2\pi f - 2\pi f_0)t} dt$$
$$F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

Le spectre $X(f)$ est alors égal à :

$$X(f) = F[A\cos(2\pi f_0 t)] = F\left\{\frac{A}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right]\right\} = \frac{A}{2}\left\{F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] + F\left[e^{-j2\pi f_0 t}\right]\right\}$$

Donc : $X(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$



Exemple 3 : transformée de Fourier de $rect\left(t/T\right)$

On considère la fonction $x\left(t\right) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$
Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} X\left(f\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t\right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= T \sin c\left(fT\right) \end{aligned}$$

De façon abrégée, on a donc :

$$x\left(t\right) = rect\left(t/T\right) \rightleftharpoons X\left(f\right) = T \sin c\left(fT\right)$$

Table des transformées de Fourier usuelles

Table: Transformée de Fourier

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$	$X(f) = \mathcal{F}v[x(t)])$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$Tsinc(fT)$
$sinc(2WT)$	$\frac{1}{2W} rect\left(\frac{f}{2W}\right)$
$e^{-at}u(t), \ a \succ 0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$tri(t)$	$sinc^2(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$

Série de Fourier

Soit $x(t)$ une fonction complexe. $x(t)$ peut se décomposer en une somme infinie de fonctions simusoidales dépendants du temps qui peut être exprimée par une combinaison linéaire de fonctions exponentielles sur l'intervalle temporel $[0,\, T_0 = 1/f_0]$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad \forall\, t \in [0,\, T_0] \tag{7}$$

n étant une valeur entière. Les coefficients de la série de Fourier, c_n, sont indépendants du temps et s'expriment de la manière suivante :

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt \tag{8}$$

si $x(t)$ est périodique de période $T_0 = 1/f_0$, f_0 représente **la fréquence du fondamentale** et nf_0 $(n \succ 1)$ représente la **fréquences des harmoniques**.

Remarques :

- $c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt$ est la valeur de $x(t)$ sur $[0,\, T_0]$,
- Si $x(t)$ est un signal réel, alors $c_{-n} = c_n^*$
- Si $x(t)$ est périodique de période T_0, alors $x(t) = x(t + T0)$ et

Série de Fourier : forme complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad \forall\, t \tag{9}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

- On peut décomposer $x(t)$ sous forme équivalente à (7) :

Série de Fourier : forme trigonométrique

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)\right) \tag{10}$$

où

- $a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$
- $b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$

Avec $\omega = 2\pi f_0$;

Série de Fourier : Remarques -1-

- $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$ *pour* $n \succ 0,\ c_n = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$ *pour* $n \prec 0$ *et* $c_0 = a_0$

• Si le signal $x(t)$ est paire, alors les coefficients b_n sont tous nuls. si le signal $x(t)$ est impair, alors les coefficients a_n sont tous nuls.

•

• Interprétation : la forme complexe de la décomposition en série de Fourier est la formulation la plus usuelle car elle permet de simplifier les calculs. Elle fait apparaître des harmoniques de fréquences négatives et positives qui servent mathématiquement à reconstituer le signal. Cependant, cette décomposition n'a pas de sens physique pour la partie associée aux fréquences négatives.

Corrélation et densités spectrales

La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).
Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.
La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour les signaux réels à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Corrélation et densités spectrales

La densité spectrale d'un signal qui représente la répartition de sa puissance sur l'axe des fréquences est une fonction de première importance constamment utilisée dans tout ce qui touche le traitement du signal (identification de processus, analyse de vibrations, etc...).
Parmi toutes les méthodes possibles de calcul de cette fonction, la méthode par corrélation (calcul de la fonction de corrélation + transformation de Fourier) est très séduisante par sa simplicité et ses performances.
La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour les signaux réels à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Signaux à énergie finie

Autocorrélation : Corrélation entre le signal $x(t)$ et lui-même :

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt \tag{11}$$

Intercorrélation : corrélation entre le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$:

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt \tag{12}$$

Corrélation et densités spectrales -1-

Signaux à puissance moyenne finie

Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie, on définit **l'autocorrélation :** par la relation :

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

et de même, on définit la fonction (**d'intercorrélation**) par :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

Propriétés :

• $C_{xx}(\tau)$ et $C_{xy}(\tau)$ sont homogènes à une énergie (énergie croisée entre un signal et un autre retardé) ou à une puissance (deuxième définition).

• $C_{xy}(\tau) = 0$, signifie que les signaux sont totalement décorrelés (signaux orthogonaux),

• $|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(\tau)\, C_{yy}(\tau)$ **(inégalité de Schwartz)** • $|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0)$, $\forall\, \tau$: la fonction d'autorrélation admet une valeur maximum en $\tau = 0$.

Densités spectrales

Il s'agit des transformées de Fourier des fonctions de corrélation que l'on vient de décrire, appelés aussi relation de **Wiener-Khintchine**.

Densités spectrales

Il s'agit des transformées de Fourier des fonctions de corrélation que l'on vient de décrire, appelés aussi relation de **Wiener-Khintchine**.

Densité spectrale de puissance

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\left\{C_{xx}(\tau)\right\}$$

Densité interspectrale de puissance

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\left\{C_{xy}(\tau)\right\}$$

Théorème de Parseval

L'identité de Parseval traduit la conservation de l'énergie lors du passage à la transformée de Fourier. On a donc :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, X^*(f)\, df$$

◇ La transformation de Fourier conserve l'énergie d'un signal.

Pour les signaux périodiques qui sont à énergie finie, on calcule dans ce cas la puissance sur une période T_0. En utilisant le développement en série de Fourier, on trouve :

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} x(t)\, x^*(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_c|^2$$

Densité spectrale d'énergie

Compte tenu que l'énergie est conservée lors du passage à la transformée de Fourier, il est possible de définir une distribution de l'énergie par unité de fréquence, la **densité spectrale d'énergie (DSE)**

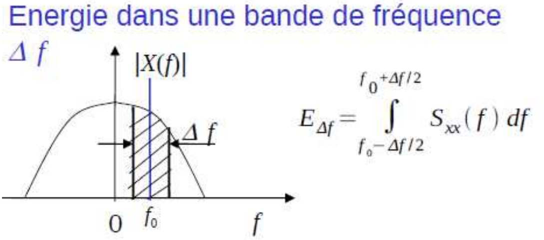


Figure: Energie dans une sous-bande fréquentielle

Energie totale :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \, df$$