Université Badji Mokhtar-Annaba
Faculté des Sciences de l'ingéniorat
Département d'Electronique

Section : S4 Auto 2019/2020 Module : Théorie du Signal Devoir 1

<u>Ex 1 :</u> Soit $x(t)$ un signal carré avec l'état bas : 0V; état haut : 5V de rapport cyclique $1/2$ et de période $T = 0,1s$
1) Calculer son énergie sur une période. En déduire son énergie totale.
2) Calculer sa puissance totale et sa puissance moyenne.
3) En déduire sa valeur efficace.
Réponse :
1) Son énergie sur une période est définie par :

$$E_x = \int_0^T x^2(t)\,dt = \int_0^{T/2} x^2(t)\,dt = \int_0^{T/2} 25dt = 25\,[t]_0^{T/2} = \frac{25\times T}{2} = 12,5\times T = 1,25\,Joule$$

Son énergie totale est égale à :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = 25\,[t]_{-\infty}^{+\infty} = [\infty+\infty] = \infty$$

2) La puissance moyenne totale est identique à la puissance calculée sur une période, définie par :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 25dt = \frac{25}{T}\,[t]_0^{T/2} = \frac{25}{2} = 12,5\,Watts$$

3) La valeur efficace est la racine carrée de la puissance (calculée sur une période, ou totale) :

$$X_{eff} = \sqrt{12,5} = 3,53\,Volt$$

<u>Ex 2 :</u> Simplifier les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t)\,dt;\ \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t+1)\,dt$$

où $s(t)$ est un signal quelconque, causal puis non causal.
2) Calculer la valeur numérique de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty} \mathrm{r}(\mathrm{t})\,\delta(t-1)\,dt$$

où $r(t)$ est la fonction rampe.
Solution :
1) $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(0)\,\delta(t)dt = s(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = s(0)$

De même $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t+1)\,dt = s(-1)$

2) $\int\limits_{0}^{\infty} r(t)\delta(t-1)\,dt = \int\limits_{0}^{\infty} r(1)\,\delta(t-1)\,dt = r(1)\int\limits_{0}^{\infty} \delta(t-1)\,dt = r(1)$

Ex 3 :

Exercice ! Considérons le signal

$$x(t) = 2\cos(3\pi t - \pi/3) - \sin(2\pi t)$$

(a) Justifier que $x(t)$ est périodique. Quelle est la période T_0 et la fréquence fondamentale ω_0?

(b) Ecrire le signal sous forme trigonométrique des séries de Fourier. Calculer explicitement les coefficients de Fourier a_0, a_k et b_k pour $k = 1, 2, \dots$

(c) Ecrire $x(t)$ sous forme exponentielle des séries de Fourier. Quels sont les coefficients C_k de Fourier?

*

Réponse :

a) Les fonctions périodiques vérifient la propriété $f(t) = f(t+T)$ pour un T.

$f(t) = 2\cos(3\pi t - \pi/3) - \sin(2\pi t)$

$f(t+T) = 2\cos(3\pi t + 3\pi T - \pi/3) - \sin(2\pi t + 2\pi T)$

$\cos(3\pi t - \pi/3) = \cos(3\pi t + 3\pi T - \pi/3)$ si $3\pi T = 2\pi k \Rightarrow T = \frac{2}{3}k$ pour $k = 0, \dots$

$\sin(2\pi t) = \sin(2\pi t + 2\pi T)$ si $2\pi T = 2\pi l \Rightarrow T = l$ pour $l = 0, 1, \dots$

$T = \frac{2}{3}k = l \Rightarrow T = LCM[2/3, 1) = \underline{\underline{2}}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

b) $f(t) = 2\cos(3\pi t - \pi/3) - \sin(2\pi t)$

$= 2\cos(\pi/3).\cos(3\pi t) + 2\sin(\pi/3)\sin(3\pi t) - \sin(2\pi t)$

$\phi(t) = a_0 + a_1\cos(\pi t) + a_2\cos(2\pi t) + a_3\cos(3\pi t) + a_4\cos(4\pi t) + \dots$
$+ b_1\sin(\pi t) + b_2\sin(2\pi t) + b_3\sin(3\pi t) + \dots$

On peut déterminer directement les coefficients !

$a_k = 0$ pour tout k sauf $k = 3$: $a_3 = 2\cos(\pi/3) = 1$

$b_k = 0$ " " " " $k = 2, 3$: $b_2 = -1$
$b_3 = 2\sin(\pi/3)$

c) $\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\pi t}$

$= \dots + C_{-4}e^{-4\pi jt} + C_{-3}e^{-3\pi jt} + C_{-2}e^{-2\pi jt} + C_{-1}e^{-\pi jt} + D_0 + C_1 e^{\pi jt} + C_2 e^{2\pi jt} + C_3 e^{3\pi jt} + \dots$

$= \dots + (C_{-3}e^{-3\pi jt} + C_3 e^{3\pi jt}) + (C_{-2}e^{-2\pi jt} + C_2 e^{+2\pi jt}) + (C_{-1}e^{-\pi jt} + C_1 e^{\pi jt}) + \dots$

$f(t) = \cos(3\pi t) + \sqrt{3}\sin(3\pi t) - \sin(2\pi t)$

$= \frac{1}{2}e^{3\pi jt} + \frac{1}{2}e^{-3\pi jt} + \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{3\pi jt} - \frac{\sqrt{3}}{2j}e^{-3\pi jt} - \frac{1}{2j}e^{2\pi jt} + \frac{1}{2j}e^{-2\pi jt}$

$C_n = 0$ sauf $C_{-3} = \frac{1+\sqrt{3}j}{2}$ $C_3 = \frac{1-\sqrt{3}j}{2}$ $C_{-2} = \frac{-j}{2}$ $C_2 = j/2$