

# Chapitre 1 : Généralités sur les signaux

Prof. M. Ramdani

Département d'Electronique  
BP. 12, Sidi Amar  
23000, Annaba, Algérie

Matière : Théorie du Signal  
S4 Automatique  
Mars 2020



- 1 Introduction
- 2 Classification des signaux
- 3 Signaux élémentaires
- 4 Approximation des signaux par des fonctions orthogonales

# Généralités sur les Signaux

# Généralités sur les Signaux

- ◇ Représentation physique d'une information à transmettre
- ◇ Entité qui sert à véhiculer une information

# Généralités sur les Signaux

- ◇ Représentation physique d'une information à transmettre
- ◇ Entité qui sert à véhiculer une information

- Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, ...)
- **Signaux physiologiques : EEG, ECG, EMG, ...etc**
- Tension aux bornes d'un condensateur en charge (Panneau Photovoltaïque Solaire, batterie, ...)
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques (Structure en génie civil, bâtiments, barrages))
- Pluviométrie (intensité de pluie, ...)
- Concentration d'une matière dans un lac ou barrage (Phosphate, nitrate, ...etc)
- Finance : cours de la bourse
- Images
- Vidéos

## Bruit

Tout phénomène perturbateur pouvant gêner la **perception** ou l'**interprétation** d'un signal

Entité qui sert à véhiculer une information

## Applications :

- Automatisation des procédés
- Robotique et mécatronique
- Génie biologique et médical
- Systèmes embarqués
- **Smart cities**
- **Smart home**



# Traitement du signal

C'est la discipline qui a pour but l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information, en s'appuyant sur **l'électronique, l'informatique et la physique appliquée**.

## Objectifs

- Décrire et représenter les signaux
- Comprendre le principe et les limitations des méthodes d'analyse et de traitement

# Traitement du signal

C'est la discipline qui a pour but l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information, en s'appuyant sur **l'électronique, l'informatique et la physique appliquée**.

## Objectifs

- Décrire et représenter les signaux
- Comprendre le principe et les limitations des méthodes d'analyse et de traitement

## Chaîne de traitement du signal



Figure: Chaîne de transmission d'un signal analogique



## Classification des signaux

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux **selon leurs propriétés**.

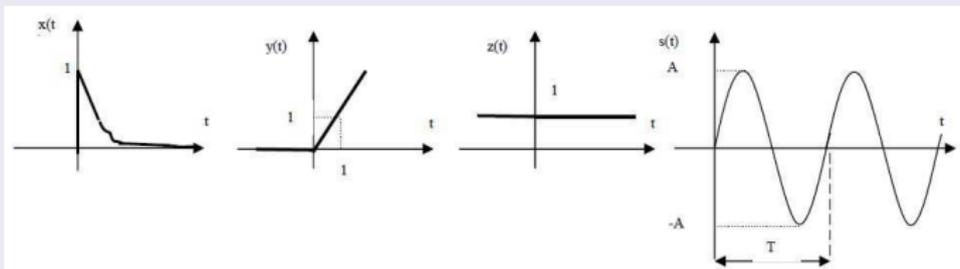
- Classification phénoménologique
- Classification énergétique
- Classification morphologique

## Classification des signaux

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux **selon leurs propriétés**.

- Classification phénoménologique
- Classification énergétique
- Classification morphologique

## Déterministes-Aléatoires



*Exemple de signaux déterministes*

# Classification énergétique

Une classification peut être faite à partir des notions d'énergie et de puissance d'un signal

- Le **contenu**  $C$  d'un signal  $s(t)$  :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$$

- L'énergie  $E_s$  de  $s(t)$ , fonction réelle ou complexe de  $t$  :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

- L'énergie est aussi appelée **valeur quadratique** de  $s(t)$

- La puissance moyenne  $P_s$  d'un signal  $s(t)$  :

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt$$

- Dans le cas particulier où  $s(t)$  est périodique de période  $T$  on a :

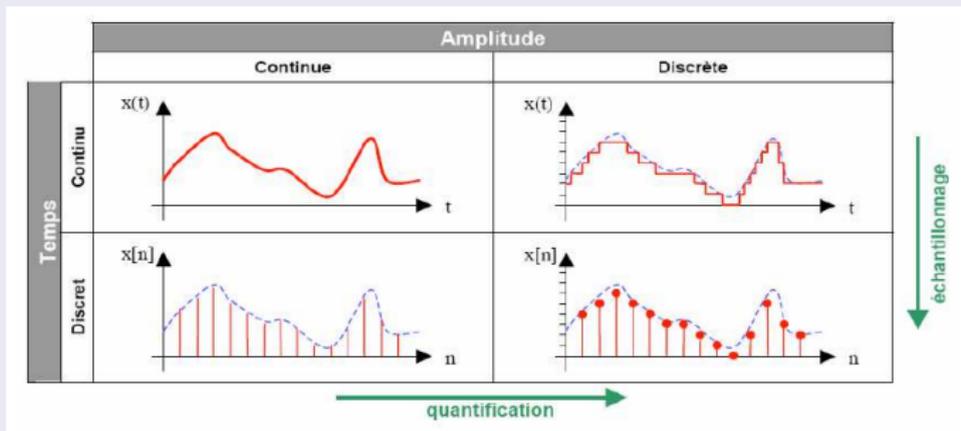
$$P_s = \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt$$

- La puissance moyenne est aussi appelée **valeur quadratique moyenne** de  $s(t)$

On distingue

- Les **signaux à énergie finie**
- Les **signaux à puissance moyenne finie**

# Classification morphologique



## Classification morphologique

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

## 1 Fonction signe

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

- 1 Fonction signe
- 2 **Fonction échelon**

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

- 1 Fonction signe
- 2 **Fonction échelon**
- 3 Fonction rampe

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

- 1 Fonction signe
- 2 **Fonction échelon**
- 3 Fonction rampe
- 4 Fonction rectangulaire ou porte

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

- 1 Fonction signe
- 2 **Fonction échelon**
- 3 Fonction rampe
- 4 Fonction rectangulaire ou porte
- 5 Fonction triangulaire

Afin de simplifier les opérations ainsi que les formules obtenus, certains signaux fréquemment rencontrés en traitement du signal dispose d'une modélisation propre.

- 1 Fonction signe
- 2 **Fonction échelon**
- 3 Fonction rampe
- 4 Fonction rectangulaire ou porte
- 5 Fonction triangulaire
- 6 **Impulsion de Dirac**

## Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

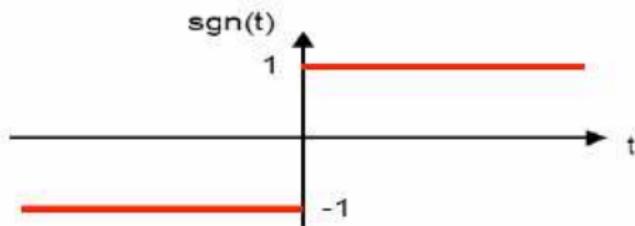
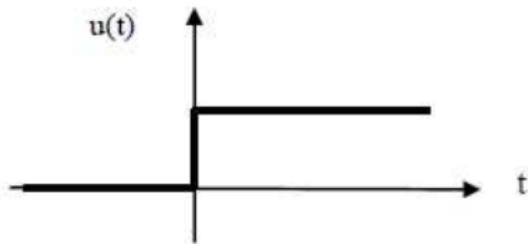


Figure (1.9) : Fonction signe.

Par convention, on admet pour valeur à l'origine :  $\text{sgn}(t) = 0$  pour  $t = 0$ .

## Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



## IV.3. Fonction rampe

Cette fonction est définie par :

$$r(t) = t.u(t)$$

$$\text{D'où } r(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ t & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

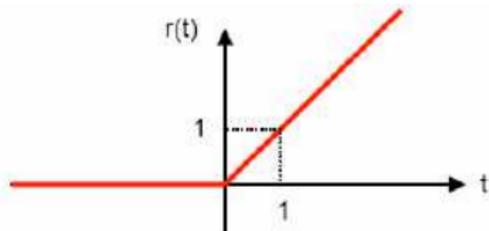


Figure (1.11) : Fonction rampe.

## IV.4. Fonction rectangulaire ou porte

Cette fonction est définie par :

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

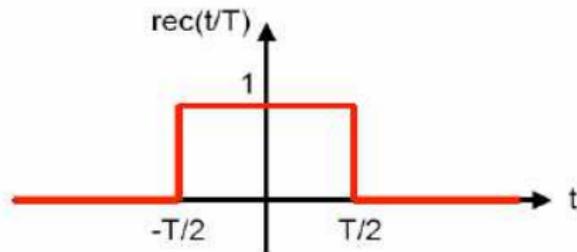


Figure (1.12) : Fonction rectangulaire

## IV.5. Fonction triangulaire

$$\begin{cases} \text{tri}(t) = 1 - |t| & \text{si } |t| < 1 \\ \text{tri}(t) = 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

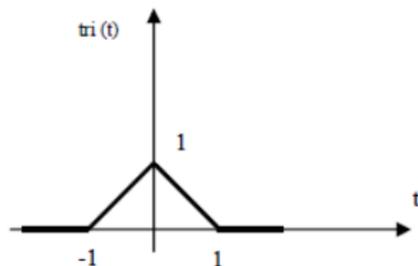


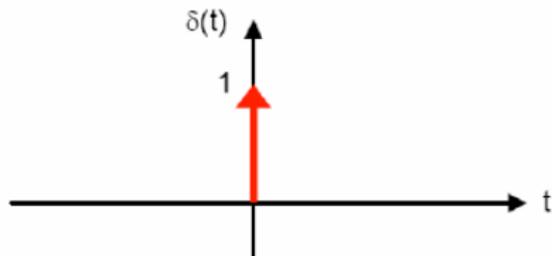
Figure (1.14) : Fonction triangulaire.

## IV.6. Impulsion de Dirac

### IV.6.1. Définition

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur  $T$  tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases}$$



## IV.6.2. Propriétés

### ➤ Intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

### ➤ Produit

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) = x(0)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0)$$

### ➤ Identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

### ➤ Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_0) = x(t - t_1 - t_0)$$

## IV.7. Peigne de Dirac

On appelle *peigne de Dirac* une succession périodique d'impulsions de Dirac.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$T$  est la période du peigne.

Cette suite est parfois appelée *fonction d'échantillonnage* ou *train d'impulsions*.

## IV.8. Fonction sinus cardinal

### IV.8.1. Définition

La fonction sinus cardinal est défini par :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

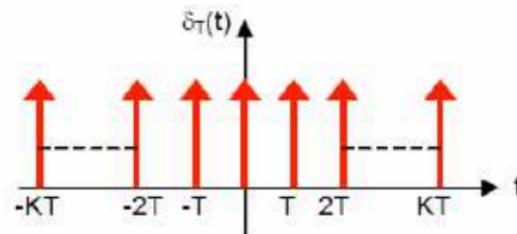


Figure (1.16): Peigne de Dirac.

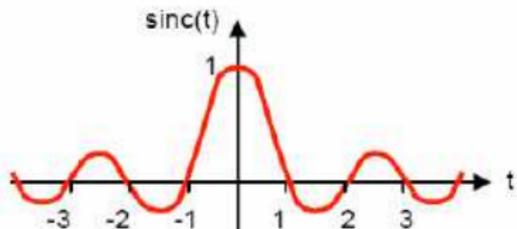


Figure (1.17) : Fonction sinus cardinal.

**Remarque** : Cette partie représente **un supplément d'information** pour permettre à l'étudiant d'avoir juste une idée générale sur la théorie d'approximation des signaux.

### Principe de la représentation vectorielle des signaux

- Le principe de la représentation vectorielle des signaux revient à considérer tout signal  $s(t)$  comme la combinaison linéaire de  $m$  fonctions  $\phi_k(t) \in \mathbb{C}$

$$s(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k(t) \quad \text{ou} \quad s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \phi_k(t)$$

- Les coefficients  $\alpha_k$  (à déterminer !) constituent une représentation discrète du signal  $s(t)$
- L'intérêt majeur de cette décomposition linéaire d'un signal à l'aide de signaux plus simples est de faciliter l'analyse de différents types de signaux
- Ceci constitue le fondement de l'analyse des signaux

## Définition (Distance euclidienne entre deux vecteurs)

La distance euclidienne entre deux vecteurs  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  est définie par :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

Le symbole  $\| \cdot \|$  est une norme dans le cas d'un vecteur complexe.

- $d_T(s, r)$  permet de mesurer le **degré de dissemblance** entre deux signaux sur un intervalle de temps  $T$ .

## Définition : norme $L^2(T)$

L'ensemble des signaux, fonctions réelles ou complexes du temps, définies sur une durée  $T$  et de carré intégrable (c-à-d d'énergie finie) forme un espace  $L^2(T)$  de norme :

$$\|s\| = d(s, 0) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt}$$

- $\|s\|^2$  représente l'énergie de  $s(t)$
- la distance entre deux signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  est donnée par :

$$d(s, r) = \|s - r\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |s(t) - r(t)|^2 dt}$$

# Produit scalaire

## Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  peut s'écrire comme suit :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad \text{et en particulier } x \cdot x = \|x\|^2$$

$y_i^*$  désigne le conjugué complexe de  $y_i$

## Définition : Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  peut s'écrire comme suit :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \text{ et en particulier } x \cdot x = \|x\|^2$$

$y_i^*$  désigne le conjugué complexe de  $y_i$

## Produit scalaire de deux signaux

Le produit scalaire de deux signaux  $s(t)$  et  $r(t) \in L^2(T)$  vaut :

$$\langle s, r^* \rangle = \int_T s(t) r^*(t) dt \text{ et en particulier } \langle s, s^* \rangle = \|s\|^2$$

# Signaux orthogonaux

## Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :  $x \cdot y = 0$

## Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :  $x \cdot y = 0$

## Définition : Signaux orthogonaux

Deux signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\langle s, r^* \rangle = \int_T s(t) r^*(t) dt = 0$$

## Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :  $x \cdot y = 0$

## Définition : Signaux orthogonaux

Deux signaux  $s(t)$  et  $r(t)$  sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\langle s, r^* \rangle = \int_T s(t) r^*(t) dt = 0$$

## Définition : Inégalité de Schwarz

De manière analogue au cas du produit scalaire de deux vecteurs, on montre que pour  $s(t)$  et  $r(t)$  deux signaux d'énergie finie, on a :

$$|\langle s, r^* \rangle|^2 \leq \|s\|^2 \cdot \|r\|^2 = \langle s, s^* \rangle \cdot \langle r, r^* \rangle$$

- Soit  $s(t) \in L^2$  de dimension  $n$
- Soit un ensemble  $\{\phi_k(t)\}$  de  $m$  fonctions linéairement indépendantes ( $m < n$ )  $\Rightarrow \{\phi_k(t)\}$  forme une base de  $F \subseteq L^2$
- on peut chercher une approximation  $\tilde{s}(t) \in L^2$  de  $s(t)$  telle que :  
$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k(t)$$
- Les  $\alpha_k$  constituent alors **les coefficients d'approximation** de  $s(t)$

## Définition (Erreur d'approximation)

On appelle erreur d'approximation  $e(t)$  la différence entre le signal  $s(t)$  et son approximation  $\tilde{s}(t)$ ,  $e(t) = s(t) - \tilde{s}(t)$

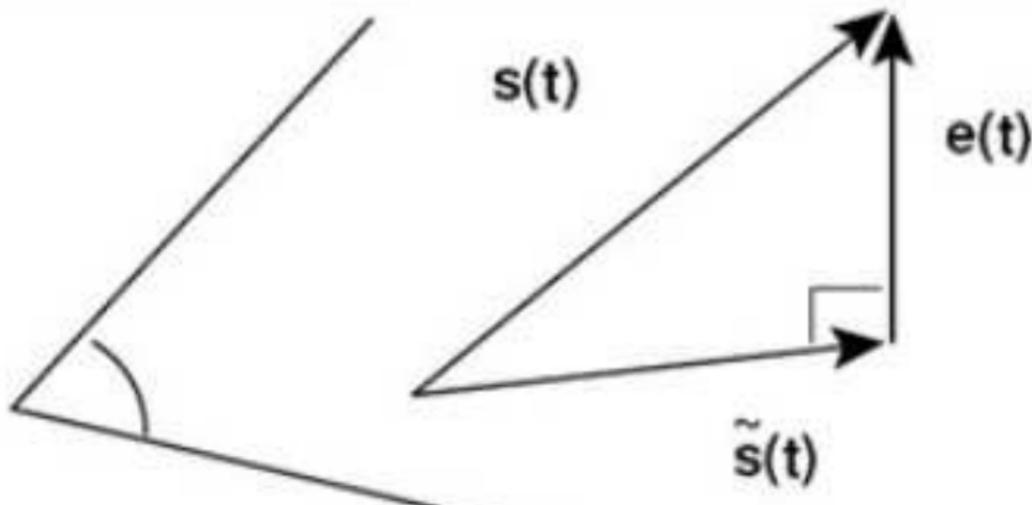
- la quantité de l'approximation (la norme) est la distance entre  $s(t)$  et  $\tilde{s}(t)$  :  
 $\|e\| = d(s, \tilde{s})$
- Le carré de cette distance  $\|e\|^2$ , est appelée erreur quadratique moyenne, elle correspond à l'énergie du signal erreur

# Approximation optimale d'un signal au sens des moindres carées

## Définition

L'approximation  $\tilde{s}(t)$  de  $s(t)$  est optimale au sens des moindres carrés si  $\|e\|$  est minimale, c'est-à-dire si le signal d'erreur,  $e(t)$ , est orthogonale aux fonctions  $\phi_k(t)$  :

$$\langle e, \phi^* \rangle = 0$$



- D'après le schéma précédent et grâce à Pythagore, on obtient :  $\|e\|^2 + \|\tilde{s}\|^2 = \|s\|^2$
- D'où  $\|e\|^2 = \|s\|^2 - \|\tilde{s}\|^2$
- En remplaçant par les formules des produits scalaires :

$$\|s\|^2 = \int_T |s(t)|^2 dt$$

$$\|\tilde{s}\|^2 = \langle \tilde{s}, \tilde{s}^* \rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_k \alpha_l^* \langle \phi_k, \phi_l^* \rangle$$

D'où

$$\|s\|^2 = \int_T |s(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_k \alpha_l^* \langle \phi_k, \phi_l^* \rangle$$

# Méthode de calcul des coefficients d'approximation

- On a vu que :  $\tilde{s} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \phi_k(t)$
- Comment calculer les  $\alpha_k$  pour avoir l'approximation optimale de  $s(t)$  à partir d'un jeu de fonctions  $\phi_k(t)$  donné ?
- Réponse : en projetant  $\tilde{s}(t)$  sur les fonctions  $\phi_k(t)$

$$\text{On a : } \langle \tilde{s}, \phi_j^* \rangle = \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle \phi_k, \phi_j^* \rangle$$

$$\text{Or } s = \tilde{s} + e$$

$$\text{Donc } \langle \tilde{s}, \phi_j^* \rangle = \langle s, \phi_j^* \rangle - \langle e, \phi_j^* \rangle$$

- comme l'approximation est optimale si l'erreur est orthogonale aux fonctions  $\phi_k(t) : \langle e, \phi_j^* \rangle = 0$
- D'où :  $\langle \tilde{s}, \phi_j^* \rangle = \langle s, \phi_j^* \rangle$

$$\text{On peut déduire : } \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle \phi_k, \phi_j^* \rangle = \langle s, \phi_j^* \rangle$$

- Nous pouvons voir l'écriture précédente sous une forme matricielle avec  $l = 1, 2, \dots, m$
- Nous obtenons :  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{N}$  avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1^* \rangle & \langle \phi_2, \phi_1^* \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle \phi_m, \phi_1^* \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_2^* \rangle & \langle \phi_2, \phi_2^* \rangle & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \langle \phi_k, \phi_l^* \rangle & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_1, \phi_m^* \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots & \langle \phi_m, \phi_m^* \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{s}, \phi_1^* \rangle \\ \langle \mathbf{s}, \phi_2^* \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle \mathbf{s}, \phi_m^* \rangle \end{pmatrix}$$

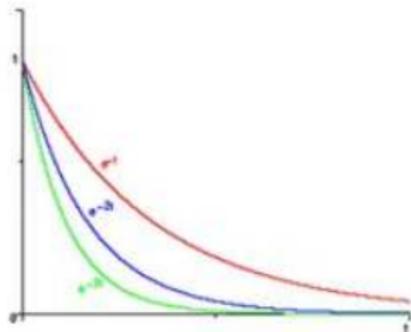
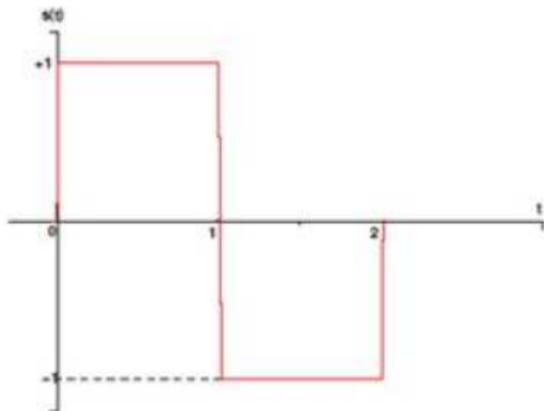
- L'ensemble des coefficients optimaux d'approximation est alors donné par le vecteur  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{N}$$

# Exemple

- On se propose de rechercher l'approximation,  $\tilde{s}$  du signal  $s(t)$  par une combinaison linéaire de **trois fonctions exponentielles** décroissantes  $\phi_k(t) = e^{-kt}$  définies sur  $]0, +\infty]$
- On a

$$\phi_1(t) = e^{-t}, \quad \phi_2(t) = e^{-2t} \text{ et } \phi_3(t) = e^{-3t}$$



- On peut chercher dans un premier temps à évaluer les différents produits scalaires  $\langle \phi_k, \phi_l^* \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi_k, \phi_l^* \rangle &= \int_0^{+\infty} \phi_k(t) \phi_l^*(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-kt} e^{-lt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(k+l)t} dt = \frac{1}{k+l} \end{aligned}$$

On en déduit la matrice:

$$\begin{array}{ccc} k = 1 & k = 2 & k = 3 \\ & & l = 1 \\ \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} & l = 2 \\ & & l = 3 \end{array}$$

- Notons que dans cet exemple particulier les fonctions  $\phi_k(t)$  ne sont pas orthogonales :  $\langle \phi_k, \phi_l^* \rangle \neq 0$  pour  $k \neq l$

- Les projections de  $s(t)$  sur les fonctions  $\phi_k(t)$  sont données par les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\langle s(t), \phi_k^*(t) \rangle &= \int_0^{\infty} s(t) \phi_k^*(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} s(t) e^{-kt} dt \\ &= \int_0^1 e^{-kt} dt - \int_1^2 e^{-kt} dt \\ &= -\frac{1}{k} [e^{-kt}]_0^1 + \frac{1}{k} [e^{-kt}]_1^2 \\ &= \frac{1}{k} [e^{-k} (e^{-k} - 2) + 1]\end{aligned}$$

- On en déduit le vecteur  $\mathcal{N}$  :

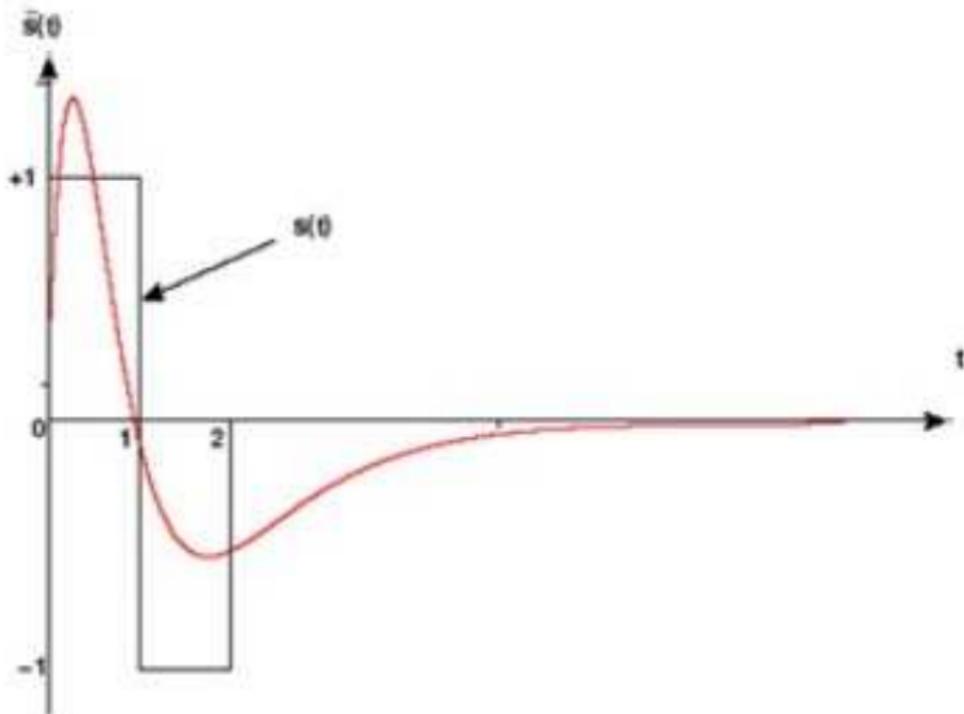
$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{s}, \phi_1^* \rangle \\ \langle \mathbf{s}, \phi_2^* \rangle \\ \langle \mathbf{s}, \phi_3^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \left[ e^{-1} (e^{-1} - 2) + 1 \right] \\ \frac{1}{k} \left[ e^{-2} (e^{-2} - 2) + 1 \right] \\ \frac{1}{k} \left[ e^{-3} (e^{-3} - 2) + 1 \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.39957 \\ 0.37382 \\ 0.30096 \end{pmatrix}$$

- Les coefficients d'approximation sont alors donnés par le vecteur  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{N} = \begin{pmatrix} +72 & +240 & +180 \\ -240 & +900 & -720 \\ +180 & -720 & +600 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,39957 \\ 0,37382 \\ 0,30096 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6,775 \\ +23,850 \\ -16,652 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La meilleure approximation possible pour le signal  $s(t)$  à l'aide d'une combinaison linéaire des fonctions  $\phi_k(t)$  est donnée par :

$$\tilde{s}(t) = -6.775\phi_1(t) + 23,850\phi_2(t) - 16,652\phi_3(t)$$



- Le calcul de l'erreur quadratique moyenne donne :

$$\begin{aligned}\|e\|^2 &= \|s\|^2 - \|\tilde{s}\|^2 = \int_0^2 |s(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\alpha_k \alpha_l}{k+l} \\ &= 2 - 1,19 \\ &= 0,81\end{aligned}$$

- Dans ce cas l'ensemble des  $\phi_k(t)$  **n'est pas complet** car l'erreur ne pourra jamais être égale à 0
- Pour trouver un meilleur ensemble de fonctions  $\phi_k(t)$  on procède par comparaison de la valeur de l'erreur avec un seuil

