

# Modélisation (MMC)

## Chapitre 3: Applications

Lahcène CHORFI  
Dept. de Maths, Université B.M. d' Annaba

28 Avril 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Déformation d'un milieu continu</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Efforts dans milieu continu</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Applications</b>	<b>4</b>
3.1	Elasticité linéaire . . . . .	4
3.1.1	Essais mécaniques . . . . .	4
3.1.2	Loi de Hooke généralisée . . . . .	7
3.1.3	Système d'élasticité de Lamé . . . . .	8
3.2	Mécanique des fluides . . . . .	10
3.2.1	Introduction . . . . .	10
3.2.2	Fluide parfait . . . . .	10
3.2.3	Fluide newtonien . . . . .	11

# Chapitre 1

## Déformation d'un milieu continu

## Chapitre 2

### Efforts dans milieu continu

# Chapitre 3

## Applications

### 3.1 Elasticité linéaire

#### 3.1.1 Essais mécaniques

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, nous avons déjà déterminé les équations de la cinématique et de la dynamique. A ces équations, il est maintenant nécessaire d'adjoindre une relation supplémentaire reliant les efforts internes et les grandeurs cinématiques. Cette relation, appelée Loi de Comportement, dépend du matériau considéré. La construction d'une loi de comportement est basée sur des observations expérimentales.

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.

Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par:

- des extrémités surdimensionnées - des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)
- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette. L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale  $L$  en fonction de la force de traction  $P$ , ou du rapport  $P/S$ , où  $S$  représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette  $Q$ .

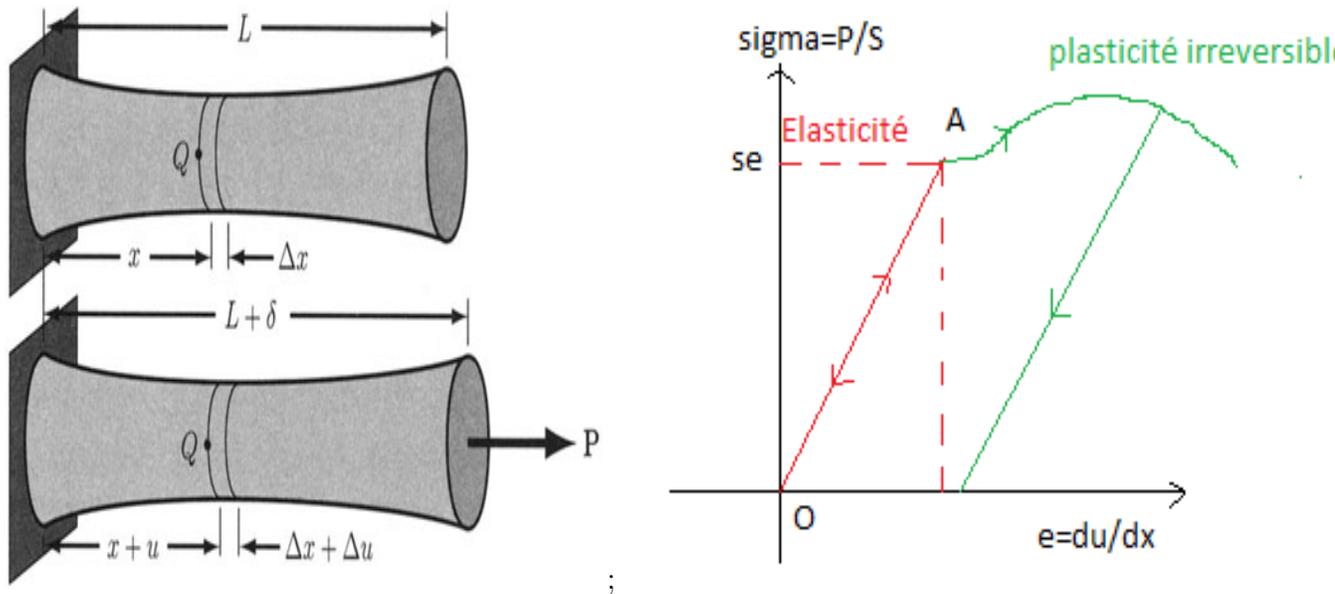


FIG. 3.1 – Essai de traction

La figure 3.1 représente un tel enregistrement pour un acier inox. On remarque alors les propriétés suivantes:

- Le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement
- La partie  $OA$  du diagramme est réversible. Si on charge jusqu'à un niveau inférieur à  $\sigma_0$ , alors la décharge décrit la même courbe  $OA$ .
- La partie réversible est linéaire
- Si on effectue un chargement au delà du seuil  $\sigma_0$ , puis une décharge, l'éprouvette présente une déformation permanente. La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du comportement élastique du matériau.  $\sigma_0$  est la limite initiale d'élasticité du matériau. La linéarité du segment  $OA$  caractérise le comportement élastique linéaire du matériau.

On définit la déformation au point  $Q$  par

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Si le cylindre a une section constante alors la déformation longitudinale est donnée par  $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ , où  $L$  est la longueur initiale de la tige et  $\delta$  est le changement de la longueur.

## Module de Young

Pour la plupart matériaux d'ingénierie, si la déformation longitudinale est suffisamment faible, la déformation est élastique et la relation entre la contrainte normale et la déformation longitudinale est approximativement linéaire - on peut écrire

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.1)$$

Cette relation est connue sous le nom de loi de Hooke et le coefficient  $E$  est une propriété du matériau appelée module de Young.

## Coefficient de Poisson

L'extension axiale s'accompagne d'une contraction dans les directions transversales. Ainsi, lors de la déformation élastique, il existe en plus une déformation latérale  $\varepsilon_y = \varepsilon_z$  à la déformation axiale  $\varepsilon_x = \sigma/E$  donnée par la loi de Hooke. Les déformations latérales et la déformation axiale sont liées par le coefficient de Poisson;

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}.$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est une autre propriété matérielle.

Exemple: Propriétés de l'Acier,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.285$ ,  $\rho = 7.8 \text{ Kg/dm}^3$ .

## Déformation de cisaillement

Considérons l'élément rectangulaire soumis à la contrainte de cisaillement uniforme  $\tau$  illustré à la figure 3.2. La déformation de cisaillement (orthogonale) est définie comme la réduction dans l'angle initialement droit  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ , de sorte que

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle B'A'C'$$

Pour la plupart des matériaux d'ingénierie, la relation entre la contrainte de cisaillement et la déformation pendant la déformation élastique est approximativement linéaire et on peut écrire

$$\tau = G\gamma$$

où  $G$  est une propriété de matériau appelée module de cisaillement. Il peut être montré en tenant compte de la déformation dans différents systèmes

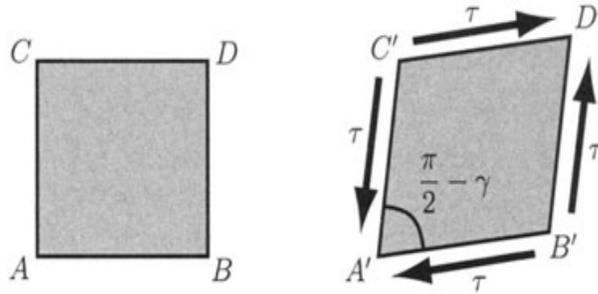


FIG. 3.2 – *Essai de cisaillement*

de coordonnées que le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module de cisaillement  $G$  ne sont pas indépendants. En effet, ils sont liés par

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### 3.1.2 Loi de Hooke généralisée

#### Champ de déplacement

Notations.

- Déformation  $x = \phi(X)$ ,  $F(X) = \nabla\phi(X)$
- Déplacement  $u(X) = x - X$

$$\delta u = H(X)\delta X, \quad H(X) = \nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) = F(X) - I$$

Hypothèses:

- $|u|$  est petit devant la dimension du milieu  $\Omega_0$ .
- Tenseur de petites déformations

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2}(H^T + H), \quad \varepsilon_{ij}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

- Hypotèses de petite déformations: si  $\eta = \|H(X)\|$  petit devant 1, alors le tenseur de Cauchy

$$C(X) = I + 2\varepsilon(X) + O(\eta^2)$$

donc  $\varepsilon = L$  tenseur de Green-Lagrange

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu continu sont liés par des lois appelées lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Le comportement élastique d'un milieu continu est caractérisé par une relation linéaire liant les contraintes aux déformations :

$$[\sigma] = [C].[\varepsilon]$$

où  $C$  est un tenseur d'ordre 4. En notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs  $(\sigma_{ij})$  et  $(\varepsilon_{ij})$  on peut écrire que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité  $[C]$  fait apparaitre (21) coefficients au lieu de (36).

**Définition 1** – *Le milieu est dit homogène si  $C_{ijkl}$  ne dépend pas de  $X$  ( $C(X) = C$ ).*

– *Le milieu est dit isotrope si la relation  $[\sigma] = [C].[\varepsilon]$  est invariante sous l'action des rotations d'espace (ie si on change le repère, le tenseur  $C$  ne change pas)*

Si le milieu est isotrope on a:

$$\begin{aligned} [\sigma] = [C].[\varepsilon] &\Leftrightarrow \sigma(u) = \lambda(\operatorname{div} u)I + 2\mu\varepsilon(u) \\ &\Leftrightarrow \sigma_{ij}(X) = \lambda(X)\operatorname{trace}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

$\lambda$  et  $\mu$  appelés coefficients de Lamé liés au module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson par les relations

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

La démonstration de ce résultat est algébrique, pour les détails voir par exemple les références [7, 9].

### 3.1.3 Système d'élasticité de Lamé

#### Conservation de la masse

L'hypothèse  $H(X) \ll 1$  entraîne

$$J(X,t) = \det(F) = \det(I + H) \simeq 1$$

d'autre part

$$\rho^P(X) = J(X,t)\rho^E(x,t) \Rightarrow \rho(x,t) = \rho_0(X) = \rho_0 \quad (\text{si le milieu est homogène})$$

Dans ce cas l'équation de continuité  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0$  entraîne  $\text{div} V = 0$ .  
L'hypothèse de petites déformations signifie que le champ de déplacement  $u = x - X$  est petit (par rapport à la dimension du corps déformable). Donc on peut confondre la variable d'Euler  $x$  et la variable de Lagrange  $X$ , par suite on peut poser  $u(X,t) = u(x,t)$ .

On a  $V = \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Rappelons l'équation du mouvement

$$\rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (\text{Grad } V)V \right] = f + \text{Div } \sigma$$

L'hypothèse  $\|\nabla u\| \ll 1$  permet de négliger le terme  $(\text{Grad } V)V$  devant  $\frac{\partial V}{\partial t}$ .  
L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \text{Div } \sigma$$

On peut montrer (en exercice) que

$$\text{Div}(\sigma) = (\lambda + \mu)\text{Grad}(\text{Div } u) + \mu\Delta u$$

d'où le système complet de Lamé

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + (\lambda + \mu)\text{Grad}(\text{Div } u) + \mu\Delta u$$

équivalent à

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) \quad i = 1, 2, 3.$$

**Conditions initiales:**

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega$$

**Conditions aux limites:**

- Déplacement imposé:  $v(x,t) = \lim_{y \rightarrow x} u(y,t)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,  $t > 0$
- Contrainte imposée:  $T(x,n) := \sigma(x,t) \cdot n = F_{cont}(x,t)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,  $t > 0$ .

## 3.2 Mécanique des fluides

### 3.2.1 Introduction

Nous allons aborder dans ce chapitre l'étude du mouvement des fluides sous l'action des forces extérieures. Nous nous limitons aux écoulements où les variations de la masse volumique sont négligeables: le fluide sera donc supposé **incompressible**.

Les forces extérieures englobent les forces de volume et les forces de surface. L'expression des forces de surface dépend principalement de la nature de la physique du fluide et de la cinématique de l'écoulement. En effet, dans certains cas, le fluide peut être considéré comme dépourvu de frottement: ce fluide est dit **parfait**. Par contre, dans les autres écoulements, les forces de frottement ne peuvent plus être négligées et le fluide est dit **visqueux**.

#### Notations:

- $x$  variable d'Euler
- On note  $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$  le champ de vitesse Eulerien (au lieu de  $V(x,t)$ )
- Pression:  $p(x,t)$ .

**Rappel.** Avec les notations précédentes rappelons les équations du mouvement d'un MC:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} &= f + \operatorname{div} \sigma\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \rho \quad (\text{dérivée particulaire}) \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} u \\ \text{avec } u \cdot \operatorname{grad} u &= (u \cdot \nabla u_1, u \cdot \nabla u_2, u \cdot \nabla u_3)^t\end{aligned}$$

### 3.2.2 Fluide parfait

- Caractérisé par la loi de comportement:  $\sigma = -pI$
- On suppose que le milieu est adiabatique (pas d'échange de chaleur), donc  $r = 0$  et  $Q = 0$ .

- Le fluide est incompressible, donc  $\operatorname{div} u = 0$ , par suite  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  et  $\rho(x,t) = \rho_0$ .

### Equations d'évolution.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} &= f - \nabla p \end{aligned}$$

La deuxième équation s'écrit sous la forme du système (d'Euler)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

### 3.2.3 Fluide newtonien

Dans un fluide non visqueux, la loi de comportement prend la forme générale

$$\sigma(x,t) = -pI + \lambda(\operatorname{div} u)I + 2\mu D(x,t)$$

où

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{est le tenseur des taux de déformation au point } x$$

Noté aussi  $\varepsilon$ ,  $\tau = 2\mu\varepsilon$  est appelé tenseur des contraintes de viscosité,  $\mu$  viscosité du fluide. Si  $\mu \neq 0$ , on dit que le fluide est visqueux.

Si le fluide est incompressible  $\operatorname{div} u = 0$ .

Donc un fluide est parfait s'il est incompressible et non visqueux.

### Equations de Navier-Stokes

Pour un fluide visqueux on a les équations de Navier-Stokes-compressible

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p + f + (\lambda + \mu)\operatorname{Grad}(\operatorname{Div} u) + \mu\Delta u$$

Si le fluide est incompressible on a  $\text{Div } u = 0$  et l'équation s'écrit sous forme du système

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Ce sont les équations de N-S pour un fluide Newtonien, incompressible et de viscosité constante.

### **Ecoulement stationnaire**

Si l'écoulement est permanent  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , on obtient l'équation de Stokes

$$\begin{cases} \text{Div } u = 0 \\ u \cdot \nabla u + \nabla p - \mu \Delta u = f \end{cases}$$

Ce sont des équations non-linéaires, la résolution nécessite des conditions aux limites (adhérence sur les parois solides) et des conditions initiales (écoulement non permanent).

# Bibliographie

- [1] O. Thual, Introd. MMC Déformables (Polytech, 1977)
- [2] J. Salençon, MMC, Ed. Ecole Polytech, Paris (2007)
- [3] F. Goley et S. Bonelli, MMC (ISITV, 2011)
- [4] MMC, Arts et Métiers, Paris-Tech (2013)
- [5] S. DEGHBODJ, Mécaniques des Milieux continus Cours et Applications, Université Larbi Tébessi de Tébessa, Département de Génie Mécanique  
<https://www.researchgate.net/publication/311909114>
- [6] A. Guerziz, Eléments de mécanique des fluides avec exercices corrigés, Publications de l'Université Badji Mokhtar, Annaba (2010)
- [7] S. Belkahla, Cours d'élasticité-plasticité, Publications de l'Université Badji Mokhtar, Annaba (2010)
- [8] J. Coirier et C. Nadot-Martin, MMC, Science Sup, Dunod (3ème édition)(2007).
- [9] W.S. Slaughter, The Linearized Theory of Elasticity, Springer Science+Business Media New York, 2002. DOI 10.1007/978-1-4612-0093-2