Exercice 4 :

Une masse de 22,4 g de COconsidéré comme GP, est soumise à la suite de transformations réversibles désignées par AB, BC et CA dans la représentation graphique suivante :

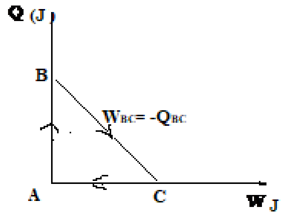
1 - Préciser la nature de chaque transformation (AB, BC et CA?

2 - Représenter ce cycle de transformation dans un diagramme de Clapeyron.

3 - Calculer les couples (P,V,T) pour chaque transformation.

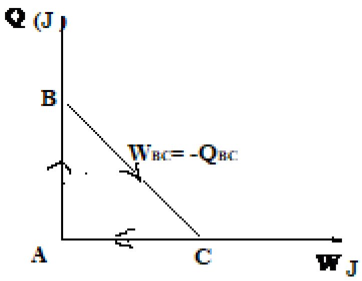
4 - Calculer en Joule : W, Q , ΔH et ΔU pour chaque transformation

On donne : R= 8,31 J .mol^{-1}.K^{-1}, Cp = 7/2 R,
P_A = 2atm, V_A = 10L, P_C = 6atm



Solution :

1. La nature de chaque transformation



- Transformation AB :

$w = 0$ => $v = cte$ => **isochore**

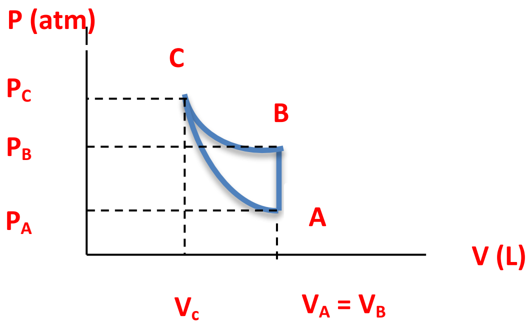
- Transformation BC :

$w = -Q$ => $T = cte$ => **isotherme**

- Transformation CA :

$Q = 0$ => **Adiabatique**

2. Présentation du cycle



3. Calcul des P, V et T pour chaque transformation

Transformation A-B	Transformation B-C	Transformation C-A
P_A = 2 atm	P_B = **?**	P_C = 6 atm
V_A = 10 L	$V_B = V_A$ = 10 L	V_C = **?**
T_A = **?**	T_B = **?**	T_A = **?**

Puisqu'on a les valeurs de P et V en atm et en L respectivement, il est préférable de prendre la valeur de 0,082 L.atm/K.mol pour la constante des gaz parfait. Sinon, si on prend la valeur de 8,31 J/K.mol ; il faut convertir la pression en Pa (1atm=1,013. 10^5 Pa) et le volume en m3 (1L = 10^{-3} m^3)

Pour calculer T_A, on applique la loi des gaz parfait :

$$P_A \times V_A = n \times R \times T_A \quad => \quad T_A = \frac{P_A \times V_A}{n \times R}$$

d'où : $n = \frac{m}{M} = \frac{22,4}{12+16} = \frac{22,4}{28} = \boxed{0,8\ mol}$

Donc :

$$T_A = \frac{P_A \times V_A}{n \times R} = \frac{2 \times 10}{0,8 \times 0,082} = 304,88\ K = 31,73\ °C$$

$$\boxed{T_A = 304,88\ K}$$

Calcul de V_C :

La transformation C- A adiabatique :

$$P_A V_A^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \quad => \quad P_A^{1/\gamma} V_A = P_C^{1/\gamma} V_C \quad => \quad V_C = V_A \left(\frac{P_A}{P_C}\right)^{1/\gamma}$$

γ = ?

On a : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1,4$

Donc :

$$V_C = 10 \left(\frac{2}{6}\right)^{1/1,4} = 4,56\ L$$

$$\boxed{V_C = 4,56\ L}$$

Pour calculer T_C, on applique la loi des gaz parfait :

$$P_C \times V_C = n \times R \times T_C \quad => \quad T_C = \frac{P_C \times V_C}{n \times R}$$

Application numérique :

$$T_C = \frac{6 \times 4,56}{0,8 \times 0,082} = 417,07\ K = 143,92\ °C$$

$$\boxed{T_C = 417,07\ K}$$

Pour calculer P_B, on applique la loi de Charles :

Puisque la transformation A-B est isochore, donc :

$$\left.\begin{aligned} P_A \times V &= n \times R \times T_A \\ P_B \times V &= n \times R \times T_B \end{aligned}\right\}$$

$V_A = V_B = V$ (transformation isochore)

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{T_B}{T_A} \quad => \quad P_B = \frac{P_A T_B}{T_A} \quad => \quad P_B = \frac{417,07 \times 2}{304,88} = 2,74\ atm$$

$$\boxed{P_B = 2{,}74\ atm}$$

4. w= ? ; Q= ? ; ΔH = ? ; ΔU = ?

<u>A-B isochore</u> : V = cte

- $W_{A-B} = -\int_{V_A}^{V_B} PdV$ Comme V=cte => dV = 0 donc ; $\boxed{W_{A-B} = 0\ J}$

- $Q_{A-B} = n.C_V \Delta T = n.C_V.(T_B - T_A) = n.\frac{5}{2}.R.(T_B - T_A)$

<u>Application numérique :</u>

$$Q_{A-B} = 0{,}8.\frac{5}{2}.8{,}31.(417{,}07 - 304{,}88) = 1864{,}60\ J$$

$$\boxed{Q_{A-B} = 1864{,}60\ J}$$

- $\Delta U_{A-B} = Q_{A-B} + W_{A-B} = 1864{,}60 + 0 = 1864{,}60\ J$

$$\boxed{\Delta U_{A-B} = 1864{,}60\ J}$$

- $\Delta H_{A-B} = n.C_p.(T_B - T_A) = n.\frac{7}{2}.R.(T_B - T_A)$

<u>Application numérique :</u>

$$\Delta H_{A-B} = 0{,}8.\frac{7}{2}.8{,}31.(417{,}07 - 304{,}88) = 2610{,}44\ J$$

$$\boxed{\Delta H_{A-B} = 2610{,}44\ J}$$

<u>B-C isotherme</u> : T = cte

- $\left.\begin{array}{l} W_{B-C} = -\int_{V_B}^{V_C} PdV \\ \text{On a : } P = \frac{n.R.T}{V} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \Rightarrow W_{B-C} = -n.R.T\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V} \\ \Rightarrow W_{B-C} = -n.R.T.\ln(\frac{V_C}{V_B}) \end{array}$

$$W_{B-C} = -0{,}8.8{,}31.417{,}07.\ln\left(\frac{4{,}56}{10}\right) = 2177{,}28\ J$$

$$\boxed{W_{B-C} = 2177{,}28\ J}$$

- Par définition : l'énergie interne (ΔU) est une quantité d'énergie à volume constant. $\Delta U_{B-C} = Q_V = n.C_V.(T_C - T_B)$ et comme la transformation B-C est isotherme donc il n'y a pas une variation de température ($\varDelta T = 0$) ce qui implique $\boxed{\varDelta U_{B-C} = 0\ J}$

- $\varDelta U_{B-C} = W_{B-C} + Q_{B-C} = 0$ => $Q_{B-C} = -W_{B-C}$

$$\boxed{Q_{B-C} = -2177{,}28\ J}$$

- $\Delta H_{B-C} = n.C_p.(T_B - T_A) = n.\frac{7}{2}.R.(T_B - T_A) = 0J$

$$\boxed{\Delta H_{B-C} = 0\ J}$$

C-A Adiabatique:

- $\boxed{Q_{C-A} = 0\ J}$

$\varDelta U_{C-A} = n.C_V.(T_A - T_C) = n.\frac{5}{2}.\ R.(T_A - T_C)$

Application numérique :

- $\varDelta U_{C-A} = 0{,}8.\frac{5}{2}.\ 8{,}31.(304{,}88 - 417{,}07) = -1864{,}60\ J$

$$\boxed{\varDelta U_{C-A} = -1864{,}60\ J}$$

- $\boxed{W_{C-A} = \varDelta U_{C-A} = -1864{,}60\ J}$

- $\Delta H_{C-A} = n.C_p.(T_B - T_A) = n.\frac{7}{2}.R.(T_B - T_A)$

Application numérique :

$\Delta H_{C-A} = 0{,}8\,.\frac{7}{2}.8{,}31\,.(304{,}88 - 417{,}07) = -2610{,}44\ J$

$$\boxed{\Delta H_{C-A} = -2610{,}44\ J}$$

A la fin ; et pour confirmer les résultats trouvés, il faut calculer $\varDelta U_{Cycle}$ et $\varDelta H_{Cycle}$ puisque l'énergie interne et l'enthalpie sont des fonctions d'états c'est-à-dire, elles ne dépendent pas du chemin suivi, elles dépendent du point initial et final.

$\varDelta U_{Cycle} = \varDelta U_{A-B} + \varDelta U_{B-C} + \varDelta U_{C-A}$

$\varDelta U_{Cycle} = 1864{,}60 + 0 - 1864{,}60 = 0\ J$

$$\boxed{\varDelta U_{Cycle} = 0\ J}$$

Ou bien :

$\varDelta U_{Cycle} = \varDelta U_{A-B} + \varDelta U_{B-C} + \varDelta U_{C-A}$

$$\Delta U_{Cycle} = W_{A-B} + Q_{A-B} + W_{B-C} + Q_{B-C} + W_{C-A} + Q_{C-A}$$

$$\Delta U_{Cycle} = 0 + 1864{,}60 + 2177{,}28 - 2177{,}28 - 1864{,}60 + 0$$

$$\boxed{\Delta U_{Cycle} = 0\ J}$$

Pour l'enthalpie totale :

On a : $\Delta H_{Cycle} = \Delta H_{A-B} + \Delta H_{B-C} + \Delta H_{C-A}$

$$\Delta H_{Cycle} = 2610{,}44 + 0 - 2610{,}44 = 0$$

$$\boxed{\Delta H_{Cycle} = 0\ J}$$