Chapitre 2 : Analyse de Fourier

1. Introduction :

En analyse mathématique, les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f. Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées. De même, on peut décomposer toute onde récurrente en une somme de sinusoïdes (fondamentale et harmoniques).

La théorie des séries de Fourier établit une correspondance entre la fonction périodique et les coefficients de Fourier, de ce fait, l'analyse de Fourier peut être considérée comme une nouvelle façon de décrire les fonctions périodiques.

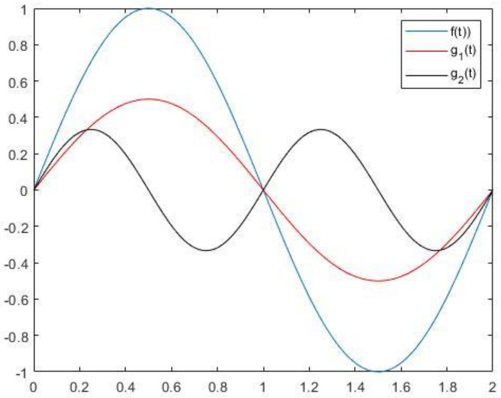
L’analyse de Fourier est donc un outil fondamental pour le traitement du signal, elle permet d’associer à la forme d’onde habituelle « la représentation d’un signal en fonction de sa variable d’évolution », une autre représentation dans le domaine fréquentiel.

On présentera dans ce chapitre les principaux outils mathématiques nécessaires au traitement du signal.

2. Série de Fourier :

La série de Fourier permet la décomposition d’une fonction périodique en un ensemble « éventuellement l’infini » construit à partir d’une autre fonction périodique « plus simple à manipuler ».

- Soit $f(t)$ une fonction de période *T*, de pulsation $\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T}$ et de fréquence $f_0 = {}^{1}/_{T}$ à décomposer.
- Soit $g(t)$ une autre fonction de périodes : T , ${}^{T}/_{2}$, ${}^{T}/_{3}$, ${}^{T}/_{4}$,………, ${}^{T}/_{n}$ (*n* Périodes courtes) L’ensemble des $g_n(t)$ va contribuer à la reconstruction de la fonction $f(t)$.
- Dans La figure suivante on a représenté la fonction $f(t)$ et seulement 2 fonctions $g_1(t)$ et $g_2(t)$ à titre indicatif, dans la réalité on représente toutes les composantes correspondantes aux fréquences multiples.



$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)$$

$g_n(t)$ contribuent à la reconstruction de $f(t)$

Fig 1. Représentation temporelle de $f(t)$ et de $g_n(t)$

- Le spectre en amplitude de la figure suivante montre la contribution de chaque composante pour la reconstruction de f(t), il met en évidence la puissance transportée par chaque composante de fréquence nν.

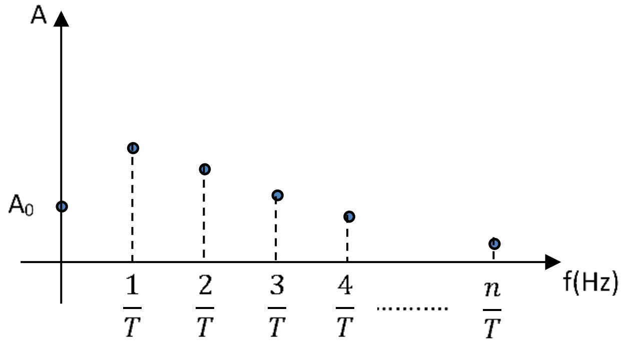


Fig 2. Spectre en amplitude de $f(t)$

- L'idée maintenant est de choisir une fonction g de forme quelconque pour approcher f, utilisons une décomposition en sinus

2.1.1 Décomposition avec des sinus :

- Dans ce cas on décompose $f(t)$ en : $sin(\omega_0 t), sin(2\omega_0 t), sin(3\omega_0 t), \dots, sin(n\omega_0 t)$
- Le but est alors de chercher la bonne approximation de la fonction initiale $f(t)$, on écrit donc :

$$f(t) \to K_n sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

- De ce fait, il apparait que pour minimiser l'erreur entre f et g, il faut chercher les valeurs les plus optimales de K_n et φ_n
- Simplifions l'équation précédente à l'aide de la formule trigonométrique :

$$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$$

Ce qui donne pour $f(t)$

$$f(t) = K_n sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$
$$= K_n sin(\ b\ +\ a)$$

(Expression avec 2 degrés de liberté K_n et φ_n)

- Après développement à l'aide de l'équation trigonométrique on obtient :

$$f(t) = A_n cos(n\omega_0 t) + B_n sin(n\omega_0 t)$$

(Expression avec 1 degré de liberté)

Où les termes A_n et B_n sont composés des K_n et φ_n mélangés.

- Chercher les valeurs optimales de K_n et φ_n, revient donc à chercher les valeurs optimales de A_0, A_1, A_2 , ... et B_0, B_1, B_2 , ... pour en déterminer la contribution individuelle, et ainsi réécrire l'expression de la série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

2.2. Détermination des termes A_n et B_n:

- Soit une fonction $f(t)$ qu'on veut approximer par un sinus c.à.d. un seul terme : $g_1(t) = sin(\omega_0 t)$.

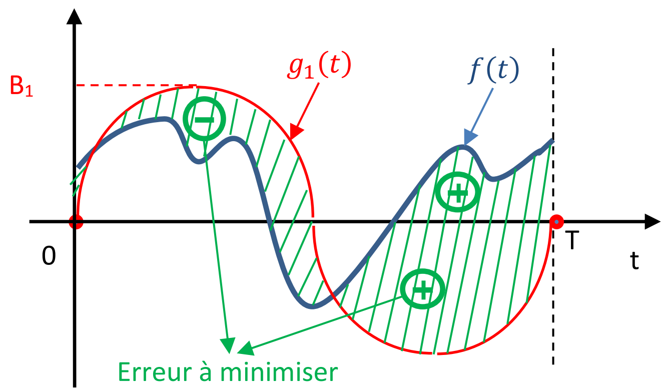


Fig 3. Reconstruction de $f(t)$ à l'aide d'un seul terme en sinus $g_1(t)$

- L'idée est donc de chercher l'amplitude optimale B_1 permettant de coller au mieux $f(t)$. De ce fait l'opération se résume à un calcul d'intégrale, et pour se faire il faut donc minimiser l'erreur pour que l'approximation soit parfaite.

2.3. Minimisation de l'erreur :

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent, l'expression de l'erreur est donnée par :

$$\Delta = \int_0^T (f(t) - B_1 \, sin(\omega_0 t))\, dt$$

- Minimiser l'erreur c'est faire c'est faire une somme de surfaces négatives et positives, pour ce faire il faut alors intégrer en valeur absolue :

$$\Delta = \int_0^T |f(t) - B_1 sin(\omega_0 t)| \ dt$$

Ce qui donnerait pour le cas de la figure précédente :

$$\Delta = \int (f(t) - B_{1-1}) \ dt + \int \left(B_{1-2} - f(t)\right) dt + \int (f(t) - B_{1-3}) \ dt + \cdots$$

- C'est une méthode assez complexe surtout quand on fera intervenir les fréquences multiples de f, il y'aura trop de calcul à faire. Afin de simplifier les calculs, observons un concept mathématique connu qui est le suivant :

- Minimisant alors l'erreur en annulant la dérivée de l'expression de Δ:

> ✓ On sait que si : $f(t)$ est minimale en t_0
>
> $f^2(t)$ est aussi minimale en t_0
>
> ✓ En plus une fonction possède un minimum quand sa dérivée est nulle : $\left(\frac{df}{dt} = 0\right)$

$$\frac{d\Delta}{dB_n} = \frac{d}{dB_n}\left(\int_0^T \left(f(t) - B_n sin(n\omega_0 t)\right)^2\right) dt = 0$$

Et sachant : $(a-b)^2 = (a^2 + b^2 - 2ab)$

$$\frac{d}{dB_n}\left(\int_0^T f(t)^2 dt + \int_0^T B_n^2 sin^2(n\omega_0 t)\, dt - 2\int_0^T f(t) B_n sin(n\omega_0 t)\, dt\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(0 + 2B_n \int_0^T sin^2(n\omega_0 t)\, dt - 2\int_0^T f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt\right) = 0$$

Ce qui donne par calcul simple le terme B_n :

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Et de la même façon le terme A_n :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) cos(n\omega_0 t)\, dt$$

A_n et B_n sont alors les termes de la série de Fourier et l'expression de la série de Fourier pour tous les termes allant de 0 à l'infini :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

- Déterminons les termes au point (0), c'est-à-dire A_0 et B_0
  - **Terme B_0**

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Au point $t = 0\,, sin(0) = 0$

$$B_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) sin(0)\, dt$$

$$B_0 = 0$$

  - **Terme A_0**

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) cos(n\omega_0 t)\, dt$$

Au point $t = 0\,, \cos(0) = 1$

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) cos(0)\, dt$$

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

Remarque : Dans la littérature on trouve beaucoup plus l'expression

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

- L'expression finale de la série de Fourier est alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

Et puisque la périodicité autorise à changer l'intervalle d'intégration on écrit les termes de Fourier comme suit :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(n\omega_0 t)\, dt$$

et

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Remarques :

1. Si $f(t)$ est une fonction paire $f(-t) = f(t)$

$\Longrightarrow \quad B_n = 0$ (puisque $sin(n\omega_0 t)$ $est\ impaire$)

2. Si $f(t)$ est une fonction paire $f(-t) = -f(t)$

   $\Longrightarrow \quad A_n = 0$ (puisque $\cos(n\omega_0 t)$ *est paire*)

2.4. Autres Formes de la série de Fourier :

Pour simplifier l'expression de la série de Fourier, on écrit celle-ci sous forme d'un polynôme trigonométrique complexe.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

D'après la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i\, sin(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

On pose : $\theta = \omega_0 t$

L'expression de Fourier s'écrit alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2i}\left(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}\right)$$

Le terme $\frac{B_n}{2i}$ peut se réécrire en le multipliant par $\frac{i}{i}$ comme suit :

$$\frac{i * B_n}{i * 2i} = \frac{iB_n}{2i^2} = \frac{iB_n}{2*(-1)} = \frac{-iB_n}{2}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2}\left(e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-iB_n}{2}\left(e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}\right)$$

Regroupant dans $f(t)$ les mêmes termes :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n - iB_n}{2}\right) e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n + iB_n}{2}\right) e^{-in\omega_0 t}$$

Pour compacter encore $f(t)$, dans la seconde partie de l'expression, on prend les n négatifs :

Donc si $n = n \ominus$

$$\Longrightarrow \begin{cases} * \ \text{Le 2nd terme} \quad \left(\frac{A_n+iB_n}{2}\right) = C_{n-} = \overline{C_n} \\ * \ e^{-in\omega_0 t} \quad \text{change de signe} \quad (n = n \ominus) \\ * \ \sum_{n=1}^{\infty} \quad \text{change de signe} \quad \sum_{n=-\infty}^{1} \end{cases}$$

Ainsi l'expression s'écrit alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n - iB_n}{2}\right) e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{1} \left(\frac{A_n + iB_n}{2}\right) e^{in\omega_0 t}$$

Qu'on peut écrire :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{1} \overline{C_n}\, e^{in\omega_0 t}$$

Le terme a_0 correspondant à C_0 pour $n = 0$ se déduit facilement :

De l'expression : $C_n\, e^{in\omega_0 t}$

$$C_0 = a_0\, e^{in\omega_0 t}$$

Pour $n = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_0 = a_0\, e^0 = a_0$

Finalement l'expression simplifiée de Fourier (en termes exponentielles) s'écrit :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\omega_0 t}$$

$$C_n = \left(\frac{A_n - iB_n}{2}\right)$$

Si on développe les termes C_n connaissant les termes A_n et B_n:

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(n\omega_0 t)\, dt - \frac{2\,i}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt\right)$$

$$C_n = \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(n\omega_0 t)\, dt - \frac{i}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(n\omega_0 t)\, dt\right)$$

De la formule d'Euler : $e^{in\omega_0 t} = cos(n\omega_0 t) + i\, sin(n\omega_0 t)$

Donc : $e^{-in\omega_0 t} = cos(n\omega_0 t) - i\, sin(n\omega_0 t)$

On obtient finalement C_n en termes d'exponentielles :

$$C_n = \left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt\right)$$

Remarques :

1. Comme les fonctions sont périodiques, on peut calculer les intégrales sur n'importe quel intervalle de longueur T.
2. Les coefficients C_n sont appelés coefficients de Fourier, elles sont généralement complexes et peuvent s'écrire sous forme exponentielle complexe :

$$C_n = |C_n|\, e^{in\omega_0 t}$$

Exemple 1 : Soit la fonction $f(t)$ de période 2π définie par :

$$f(t))\begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < \pi \\ -1 & si \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

La représentation temporelle de ce signal est la suivante :

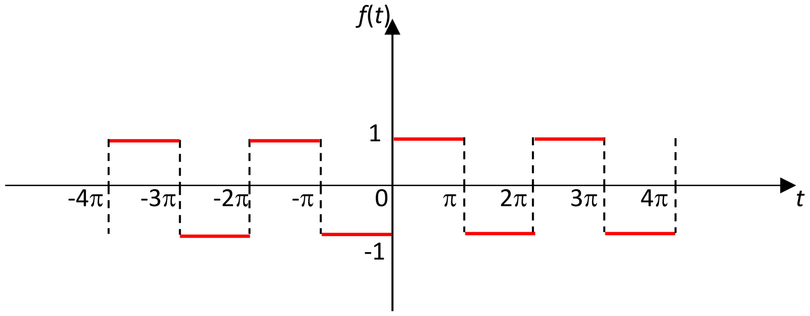


Fig 4. Représentation temporelle de $f(t)$

Déterminons l'expression de Fourier de $f(t)$ en termes trigonométriques :

$$T = 2\pi, \ , \ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

- Valeur moyenne a_0

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}(1)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}[\,t\ |_0^{\pi} + (-t)\ |_{\pi}^{2\pi} - dt]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}[\pi - 0 - 2\pi + \pi] = 0 \qquad \text{(Fonction impaire)}$$

- Termes A_n

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(n\omega t)\,dt$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(1).cos(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1).cos(nt)\,dt\right]$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sin(nt)\ |_0^{\pi} - \frac{1}{n}sin(nt)\ |_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$sin(0) = sin(n\pi) = sin(n2\pi) = 0$$

$$A_n = 0 \qquad \text{(Fonction impaire)}$$

- Termes B_n

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(n\omega t)\,dt$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(1).sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1).sin(nt)\,dt\right]$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}cos(nt)\ |_0^{\pi} + \frac{1}{n}cos(nt)\ |_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$cos(0) = cos(n2\pi) = 1$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n}(cos(n\pi) - 1) + \frac{1}{n}\big(1 - cos(n\pi)\big)\right]$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\big(1 - cos(n\pi)\big)$$

- Expression de la série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0\,.\,cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\big(1 - cos(n\pi)\big)\,.\,sin(nt)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(1 - cos(n\pi)\big)\,.\,sin(nt)$$

Exemple 2 : Soit la fonction $f(t)$ de période 2 définie par :

$$f(t))\begin{cases} t+1 & si \quad 0 \le t < 1 \\ 2 & si \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$$

La représentation temporelle de ce signal est la suivante :

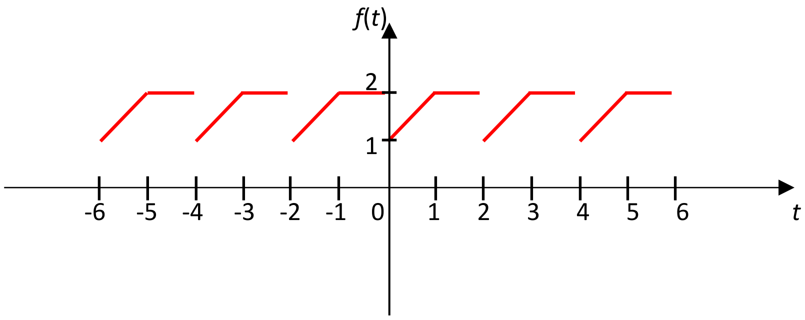


Fig 5. Représentation temporelle de $f(t)$

Déterminons les termes de la série de Fourier de $f(t)$:

$$T = 2, \;, \; \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

- Valeur moyenne a_0

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (t+1)\,dt + \int_1^2 (2)\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 + (2t)\Big|_1^2\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + 1 - 0\right) + (4 - 2)\right] = \frac{7}{4}$$

- Termes A_n

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)\,dt \;=\; \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)cos(n\omega t)\,dt$$

$$A_n = \int_0^1 (t+1).\,cos(n\pi t)\,dt + \int_1^2 (2).\,cos(n\pi t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_a^b U.V'\,dt \;=\; U.V\;|_a^b \;-\; \int_a^b U'V\,dt \\ U = (t+1) \;\;\Rightarrow\;\; U' = 1 \\ V' = cos(n\pi t) \;\Longrightarrow\; V = \frac{1}{n\pi}sin(n\pi t) \end{array}}$$

$$A_n = \left[(t+1).\frac{1}{n\pi}sin(n\pi t).\,|_0^1 \;-\; \frac{1}{n\pi}\int_0^1 sin(n\pi t)\,dt\right] + 2\left[\frac{1}{n\pi}sin(n\pi t).\,|_1^2\right]$$

$$A_n = \frac{1}{n\pi}[2.\,sin(n\pi t) - sin(0)] - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}cos(n\pi t).\,|_0^1\right] + \frac{2}{n\pi}[sin(2\pi t) - sin(\pi t)]$$

$$sin(0) = sin(n\pi) = sin(n2\pi) = 0$$

$$A_n = 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}[cos(n\pi) - cos(0)] + 0$$

$$A_n = \frac{1}{n^2\pi^2}(cos(n\pi) - 1)$$

- Termes B_n

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(n\omega t)\,dt \;=\; \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)sin(n\omega t)\,dt$$

$$B_n = \int_0^1 (t+1)sin(n\pi t)\,dt \;+\; \int_1^2 2.\,sin(n\pi t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_a^b U.V'\,dt \;=\; U.V\;|_a^b \;-\; \int_a^b U'V\,dt \\ U = (t+1) \;\;\Rightarrow\;\; U' = 1 \\ V' = sin(n\pi t) \;\Longrightarrow\; V = -\frac{1}{n\pi}cos(n\pi t) \end{array}}$$

$$B_n = \left[(t+1).\frac{-1}{n\pi}cos(n\pi t).\,|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 cos(n\pi t)\,dt\right] + 2\left[\frac{-1}{n\pi}cos(n\pi t).\,|_1^2\right]$$

$$B_n = \frac{-1}{n\pi}[2.\,cos(n\pi) - cos(0)] + \frac{1}{n^2\pi^2}[sin(n\pi t).\,|_0^1] - \frac{2}{n\pi}[cos(2n\pi) - cos(n\pi)]$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}[1 - 2.\,cos(n\pi)] \;+ 0 \;-\; \frac{2}{n\pi}[1 - cos(n\pi)]$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}[1 - 2.\,cos(n\pi)] \;-\; \frac{2}{n\pi}[1 - cos(n\pi)]$$

$$B_n = \frac{-1}{n\pi}$$

- Expression de la série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}(cos(n\pi) - 1) \,.\, cos(n\pi t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} .\, sin(n\pi t)$$

Exemple 3 : Soit le signal de la figure suivante, Ecrire la série de Fourier en termes complexes

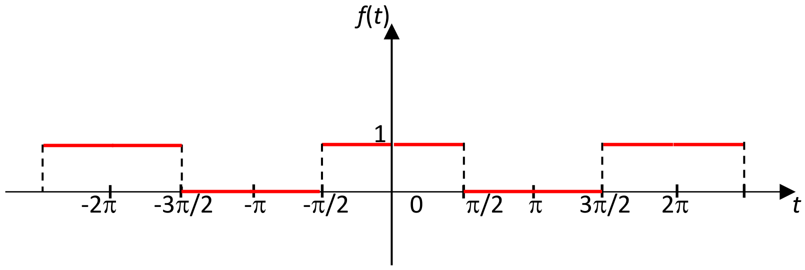


Fig 6. Représentation temporelle de $f(t)$

Calculons les termes de Fourier en base complexe

$$T = 2\pi \ , \ \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

- Valeur moyenne a_0

$$a_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 2 * \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/2} (1)\,.\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t \ |_0^{\pi/2}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

- Termes A_n

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) cos(n\omega t)\,dt = 2 * \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t) cos(n\omega t)\,dt$$

$$A_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi/2} (1).\, cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi} * \frac{1}{n} sin(nt) \ |_0^{\pi/2}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} * \frac{1}{n} sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & si \ \ n \ \ paire \\ \frac{2}{n\pi} & si \ \ n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-2}{n\pi} & si \ \ n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

- Termes B_n

  Le signal est pair alors : $B_n = 0$

- Expression de la série de Fourier en termes trigonométriques :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} . sin\left(n\frac{\pi}{2}\right). cos(nt) + 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} . sin\left(n\frac{\pi}{2}\right). cos(nt)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(t) - \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(5t) - \frac{1}{7}\cos(7t) + \cdots\right)$$

Sachant que : $-\cos(t) \; = \; \cos(t-\pi)$

Alors :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{1}{3}\cos(3t-\pi) + \frac{1}{5}\cos(5t) + \frac{1}{7}\cos(7t-\pi) + \cdots\right)$$

- Les termes complexes de Fourier :
  - ✓ $C_0 = a_0 = \frac{1}{2}$
  - ✓ $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \; = \; \sqrt{A_n^2} \; = \; |A_n| \; = \begin{cases} 0 & si \;\; n \, paire \\ \frac{2}{n\pi} & si \, n \, impaire \end{cases}$
  - ✓ $\theta_n \; = \; tg^{-1}\left(\frac{B_n}{A_n}\right) = \begin{cases} -\pi \;\; si \;\; n = 3, 5, 7, \ldots \\ 0 \qquad\qquad ailleurs \end{cases}$

2.5. Représentation fréquentielle ou spectrale :

Partant de l'expression de la S.F: $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin(n\omega_0 t)$

Le terme général : $A_n cos(n\omega_0 t) + B_n sin(n\omega_0 t)$ est appelé harmonique de rang n. En le multipliant par ${C_n}/{C_n}$ il peut être mis sous la forme :

$$A_n cos(n\omega_0 t) + B_n sin(n\omega_0 t) \; = \; \sqrt{A_n^2 + B_n^2} * \left[\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} cos(n\omega_0 t) + \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} sin(n\omega_0 t)\right]$$

En Posant : $\cos\varphi_n = \frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}$ et $\sin\varphi_n = \frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}$

$$\Longrightarrow \; A_n cos(n\omega_0 t) + B_n sin(n\omega_0 t) \; = \; [\cos\varphi_n . cos(n\omega_0 t) + \sin\varphi_n . sin(n\omega_0 t)]$$

Or : $\cos a . \cos b + \sin a . \sin b = \cos(a-b)$

$$\Longrightarrow \; A_n cos(n\omega_0 t) + B_n sin(n\omega_0 t) \; = \; cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

L'expression de Fourier peut donc s'écrire sous la forme polaire :

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,.cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\varphi_n = arctg\frac{B_n}{A_n}$$

L'harmonique de rang $n = 1$ est appelé le fondamental, c'est un signal sinusoïdal d'amplitude C_1, de période T, fréquence f_0 et de phase à l'origine $-\varphi_1$.

Remarques :

- $C_0 = a_0$ c'est la composante continue
- $Les\ amplitudes\ C_n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini

2.5.1. Spectres Unilatéraux d'amplitude et de phase :

La représentation spectrale de la fonction $f(t)$ est obtenue en portant en ordonnées l'amplitude des harmoniques (les termes $A_n, B_n, ou\ C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$) et en abscisses les pulsations (fréquences) correspondantes. Les termes C_n et φ_nn'existent que pour des multiples entiers de ω_0, il s'agit d'un spectre de raies.

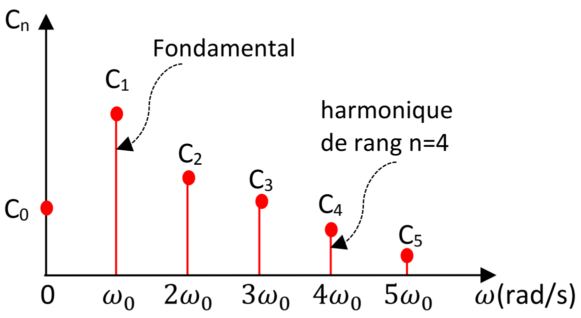


Fig 7. Spectre unilatéral d'amplitude

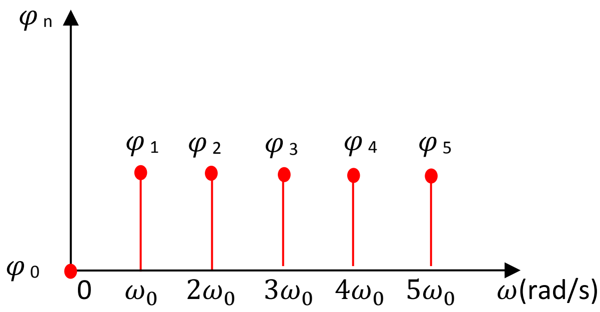


Fig 8. Spectre unilatéral de phase

2.5.2. Spectres Bilatéraux d'amplitude et de phase :

Considérons l'expression de Fourier en termes complexe exponentielle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{in\omega_0 t}$$

Les coefficients de Fourier exponentielle complexe $C_n = |C_n|\, e^{in\omega_0 t}$

Rappelons que pour un nombre complexe : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i\,Arg(z)}$

Où : $\begin{cases} \rho = |z| & \text{représente le module de } z \\ \arg(z) = \theta & \text{représente l'argument de } z \end{cases}$

De ce fait : $C_n = |C_n|\, e^{in\omega_0 t} = |C_n|\, e^{i\,Arg(C_n)}$

$$\Rightarrow \; f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|\, e^{i\,Arg(C_n)} * e^{in\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \; f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|\, e^{i\,(n\omega_0 t + Arg(C_n))}$$

La représentation spectrale bilatérale de la fonction $f(t)$ est obtenue en portant de la même maniérer que pour le spectre unilatéral (en ordonnées le module des harmoniques et en abscisses les pulsations correspondantes.

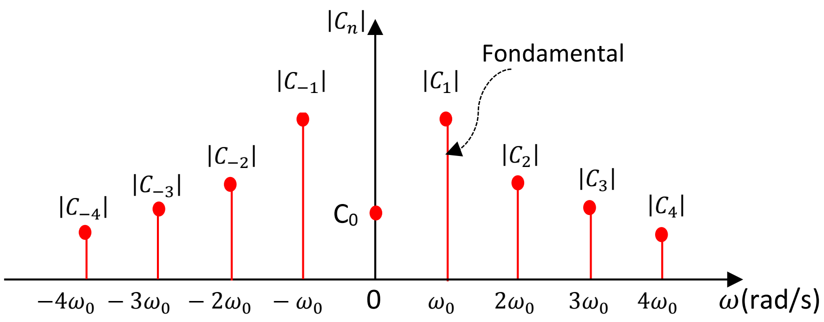


Fig 9. Spectre bilatéral des modules

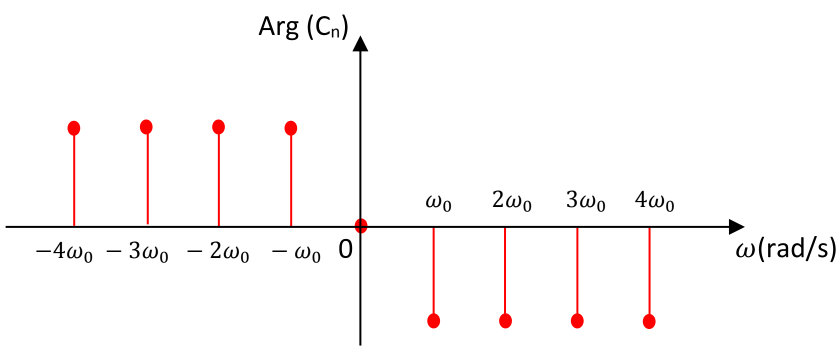


Fig 10. Spectre bilatéral de phases

Remarques :

- Il apparait dans l'expression de $f(t)$ des termes pour les fréquences s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$, raison pour laquelle le spectre est dit bilatéral
- Le spectre d'amplitude bilatéral est toujours pair
- Le spectre de phase bilatéral est toujours impair

Exemple : Soit le signal cosinusoïdal décrit par :

$$f(t) = 2\cos\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Identifions les éléments de f : $f(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} A = 2 \\ \omega_0 = 2\pi f_0 \implies f_0 = 10 \quad , \quad T = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{1}{10} = 0.1s \\ \varphi = {}^{\pi}/_{4} \end{cases}$$

Ecrivons $f(t)$ sous forme polaire, sachant que : $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ où $\theta = \left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$f(t) = 2\cos\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{e^{i\left(2\pi 10t-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(2\pi 10t-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$$

$$f(t) = e^{i\left(2\pi 10t-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(2\pi 10t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$e^{(a+b)} = e^a e^b$$

$$f(t) = e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)} * e^{i(2\pi 10t)} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} * e^{-i(2\pi 10t)}$$

La forme polaire de la série de Fourier étant :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|\, e^{i\,(n\omega_0 t + Arg(C_n))} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|\, e^{i\,Arg(C_n)} * e^{in\omega_0 t}$$

$$\implies \begin{cases} f(t) = e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)} * e^{i(2\pi 10t)} - e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} * e^{-i(2\pi 10t)} \\ \quad = \mathrm{C}_1 * e^{i(2\pi 10t)} + \mathrm{C}_{-1} * e^{-i(2\pi 10t)} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1 = e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)} & |\mathrm{C}_1| = 1 & \arg(\mathrm{C}_1) = \frac{-\pi}{4} \\ \mathrm{C}_{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} & |\mathrm{C}_{-1}| = 1 & \arg(\mathrm{C}_{-1}) = \frac{\pi}{4} \\ & \mathrm{C}_0 = \mathrm{a}_0 = 0 & \end{cases}$$

Les figures suivantes représentent l'évolution temporelle et les spectres unilatéraux de $f(t)$

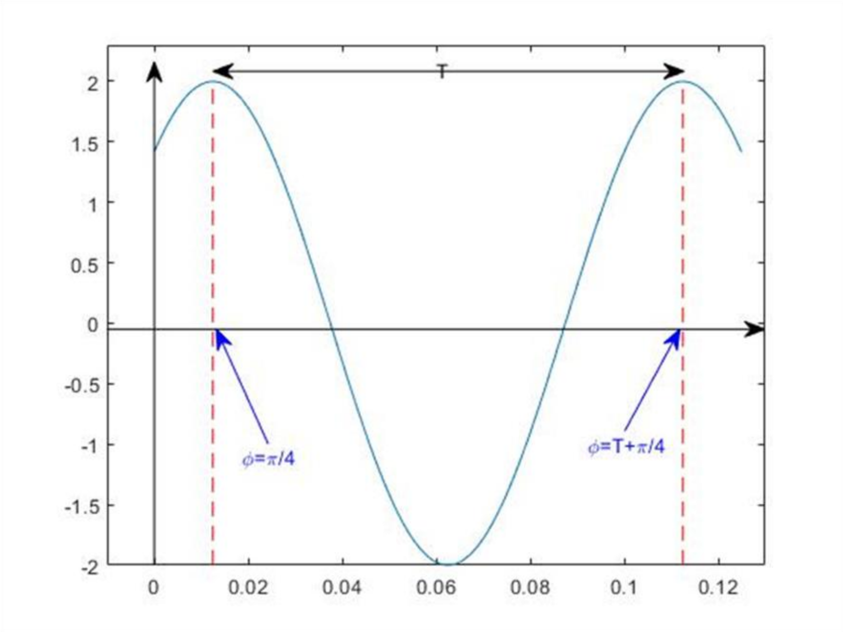


Fig 11. Représentation temporelle de $f(t)$

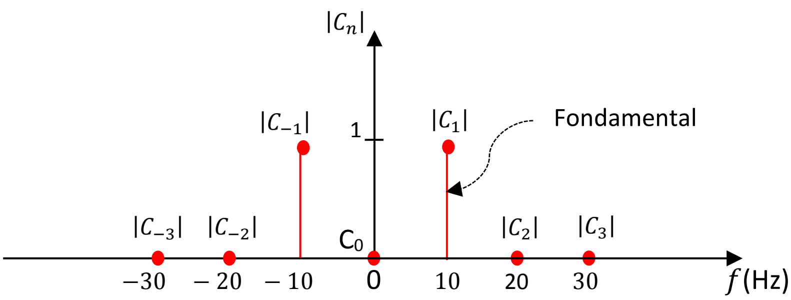


Fig 12. Spectre des modules

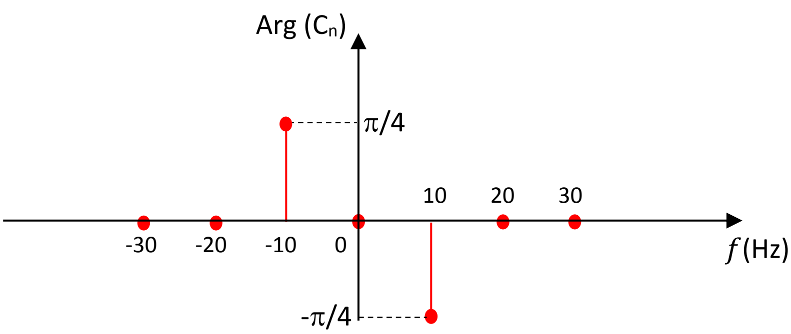


Fig 13. Spectre de phases

3. Cas d'un signal non périodique

3.1. Transformée directe de Fourier (notée T.F):

- Un signal non périodique est un signal qui ne revient jamais à sa position initiale.
- La variable T représentant la période va donc passer à l'infini (prend une valeur continue dans le temps).
- Reprenons l'expression de Fourier et voyons ce qui va changer :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{in\omega_0 t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt$$

- Pour éviter le problème d'annulation de C_n puisque $T \to \infty$ on considère alors la fonction

$$T.C_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t} dt$$

et les correspondances suivantes :

$$T \to \infty \qquad \omega_0 \to d\omega \qquad n.\omega_0 \to \omega \qquad T.C_n \to F$$

- À partir de celles-ci, on voit que la série de Fourier discrète devient une fonction continue. Effectivement cette fonction F est une densité spectrale d'amplitude qui, par définition, est la transformée de Fourier d'un signal apériodique $f(t)$

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\, e^{-i\omega t} dt$$

3.2. Transformée inverse de Fourier (notée T.F.I) :

- La transformée inverse s'obtient en considérant la fonction périodique pour laquelle la période T tend vers l'infini ; on a alors :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F.\; e^{in\omega_0 t}$$

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}.(T.F).\; e^{in\omega_0 t}$$

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0.(T.F).\; e^{in\omega_0 t}$$

- Lorsque on passe à la limite
  - $T \to \infty \qquad T.F \to F \qquad \omega_0 \to d\omega \qquad n.\omega_0 \to \omega$

On obtient ainsi la définition de la transformée inverse de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F.e^{i\omega t} d\omega$$

Remarque :

- L'expression de la transformée inverse de Fourier peut être écrite en termes de fréquences puisque pulsation et fréquence sont liés par $\omega = 2\pi f$, par conséquent on écrit :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F.e^{i2\pi ft} df$$

- Il est important de noter que les unités de F ne sont pas les mêmes que celle du signal original $f(t)$.
- Dans le cas où le signal $f(t)$ est par exemple une tension électrique, sa transformée F représentant ainsi la densité spectrale en fonction des fréquences s'exprime en $[^V/_{Hz}]$.

Exemple 1 : Soit le signal décrit par $f(t)$ et représenté dans la figure suivante :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le a \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

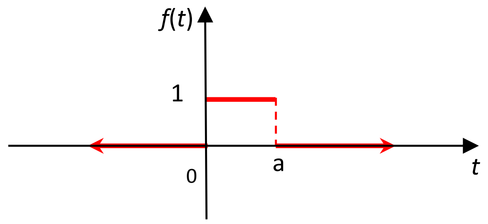


Fig 14. Représentation temporelle de $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \,.\, e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-0}^{a} 1 \,.\, e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \;|_0^a$$

$$F(\omega) = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a} - 1\right)$$

Appliquons quelques principes de base caractérisant le calcul exponentiel :

$$e^x * e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$$

Et : $e^{-x} = e^{-x/2} * e^{-x/2}$

De ce fait on écrit : $e^{-i\omega a} = e^{-i\omega a/2} * e^{-i\omega a/2}$

Et : $e^{-i\omega a} = e^{-i\omega a/2} * e^{i\omega a/2} = e^0 = 1$

L'expression $F(\omega)$ s'écrit alors :

$$F(\omega) = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a} - 1\right) = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega a/2} * e^{-i\omega a/2} - e^{-i\omega a/2} * e^{i\omega a/2}\right)$$

$$F(\omega) = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega a/2}\left(e^{-i\omega a/2} - e^{i\omega a/2}\right) = \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega a/2}\left(e^{i\omega a/2} - e^{-i\omega a/2}\right)$$

Sachant que : $sin(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$ multiplions le tout par $^2/_2$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}e^{-i\omega a/2}\left(\frac{e^{i\omega a/2} - e^{-i\omega a/2}}{2i}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}e^{-i\omega a/2}\,.\,sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)$$

Exemple 2 : Soit le signal décrit par $f(t)$ et représenté dans la figure suivante :

$$f(t) = \begin{cases} t\,, -1 \le t \le 1 \\ 0\,, \quad ailleurs \end{cases}$$

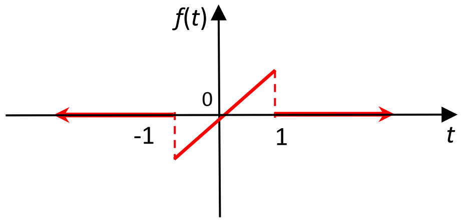


Fig 15. Représentation temporelle de $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,.\,e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{1} t\,.\,e^{-i\omega t}dt$$

$$\boxed{\begin{gathered} \int_a^b U.V'\,dt = U.V\,|_a^b - \int_a^b U'V\,dt \\ U = t \Rightarrow U' = 1 \\ V' = e^{-i\omega t} \Longrightarrow V = -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t} \end{gathered}}$$

$$F(\omega) = -\frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t}\,|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}dt$$

$$-\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = i$$

$$F(\omega) = \frac{i.t}{\omega}e^{-i\omega t}\,|_{-1}^{1} + \frac{1}{i\omega}\left(\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\right)\,|_{-1}^{1}$$

$$F(\omega) = \frac{i.t}{\omega}e^{-i\omega t}\,|_{-1}^{1} + \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega t}\right)\,|_{-1}^{1}$$

$$F(\omega) = \frac{i}{\omega}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right) + \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right)$$

Multiplions par $(\frac{2}{2})$ le premier terme de l'équation et par $(\frac{2i}{2i})$ le second terme de l'équation

$$F(\omega)=\frac{2i}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2}\right)-\frac{2i}{\omega^2}\left(\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{2i}{\omega}\big(cos(\omega)\big)-\frac{2i}{\omega^2}\big(sin(\omega)\big)$$

$$F(\omega)=\frac{2i}{\omega}\left(cos(\omega)-\frac{1}{\omega}sin(\omega)\right)$$

4. Théorème de Parseval :

4.1. Cas d'un signal continu

- L'égalité de Parseval pour les signaux périodiques à temps continu est :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2$$

C_n Étant les coefficients de Fourier et T la période du signal $f(t)$.

On note que la partie gauche de l'équation n'est autre que la puissance moyenne (c'est dire l'énergie par unité de temps) pour une période du signal $f(t)$. On note aussi que dans l'expression de Fourier :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,e^{in\omega_0 t}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left|C_n\,e^{in\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T |C_n|^2\,dt = |C_n|^2$$

Ainsi, ce que la relation de Parseval indique, c'est que la puissance moyenne totale dans un signal périodique est égale à la somme des puissances moyennes de toutes les harmoniques composant le signal.

L'égalité de Parseval peut être écrite en termes de Fourier :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0(f)|^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|A_n(f)|^2+|B_n(f)|^2\right)$$

Où $a_0(f)$, $A_n(f)$, $B_n(f)$ désignent les coefficients de Fourier de $f(t)$. Il s'agit d'un résultat très utile, à la fois sur un plan théorique pour montrer que l'application associe ses coefficients de Fourier et sur un plan pratique pour calculer la somme de certaines séries.

4.2. Cas d'un signal discret :

- Le théorème de Parseval, sous sa forme discrète, s'écrit pour un signal x :

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(nT_e)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

Exemple : Appliquons l'égalité de Parseval à la fonction $f(t) = t$ de période $T = 2\pi$ pour montrer que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

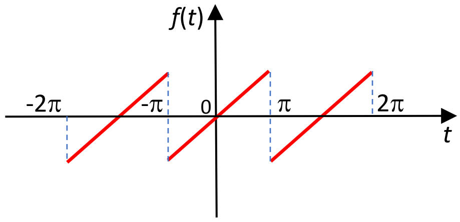


Fig 16. Représentation temporelle de $f(t)$

- f étant impaire on en déduit que : $a_n = 0$
- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,.dt = \frac{1}{2\pi} * \frac{t^2}{2} \,|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$
- $b_n = -2\,\frac{(-1)^n}{n}$

Appliquons alors l'égalité de Parseval en tenant compte des coefficients de Fourier mentionnés

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi} * \frac{t^3}{3}.|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} * \left(\frac{\pi^3 + \pi^3}{3}\right) = \frac{1}{2\pi} * \left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \end{cases}$$

Ecrivons alors l'égalité de Parseval

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2} * \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$