

Algèbre 2 Série 3 (Matrices)

Exercice 5

Dr Ahmed Berkane

26/04/2020

Le rang de la matrice

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ici $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Trouvons le rang de la matrice A :

On a : $\det A = 2 \neq 0$, A est inversible.

Donc l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est bijective

on a $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est surjective

$$\implies \text{Im } f = \mathbb{R}^3 \implies \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

on sait que : $\text{rang } A = \text{rang } f = \dim \text{Im } f = 3$

donc : $\text{rang } A = \text{rang } f = \dim \text{Im } f = 3$.

Calcul sur les matrices

2) Montrons que $A^2 = A + 2I$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\implies A^2 = A + 2I.$$

Alors :

$$A^3 = AA^2 = A(A + 2I) = A^2 + 2A.$$

$$\implies A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\implies A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Equation matricielle

3) Déterminons a, b, c et d tels que : $aA^3 + bA^2 + cA + dI = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+2b+d & 3a+b+c & 3a+b+c \\ 3a+b+c & 2a+2b+d & 3a+b+c \\ 3a+b+c & 3a+b+c & 2a+2b+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b+d=0 \\ 3a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-2a-2b \\ c=-3a-b \end{cases}$$

Equation matricielle et l'inverse de A

4) Vérifions si $a = 0$ et $b = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -2(0) - 2(1) \\ c = -3(0) - (1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2 \neq 0 \\ c = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Donc : } aA^3 + bA^2 + cA + dI = 0$$

$$\Rightarrow (0)A^3 + (1)A^2 + (-1)A + (-2)I = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow A^2 - A = 2I$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(A - I)A = I.$$

Il en résulte que A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$