

Algèbre 2 Série 3 (Matrices)

Exercice 8

Dr Elbahi Hadidi

26/04/2020

L'application f

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire (endomorphisme),

sa matrice associée dans la base canonique

$$B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

est :

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

L'application f

1) Déterminons l'application f :

$$\begin{aligned}\text{On a : } (x, y, z) &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ \implies f(x, y, z) &= f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) \\ \implies f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1)\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, -1, 0) = v_1, \text{ c'est la 1ère colonne} \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) = v_2, \text{ c'est la 2ème colonne} \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (1, 1, 2) = v_3, \text{ c'est la 3ème colonne}\end{aligned}$$

$$\implies f(x, y, z) = x(1, -1, 0) + y(-1, 1, 0) + z(1, 1, 2)$$

$$\text{donc : } f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z).$$

2) Montrons que $B' = \{e'_1 = (1, 2, 0), e'_2 = (-1, 0, -1), e'_3 = (0, 1, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card } B'$, il suffit de montrer que B' est libre :

$$\begin{aligned}\alpha(1, 2, 0) + \beta(-1, 0, -1) + \gamma(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\ \implies (\alpha, 2\alpha, 0) + (-\beta, 0, -\beta) + (0, \gamma, 0) &= (0, 0, 0) \\ \implies (\alpha - \beta, 2\alpha + \gamma, -\beta) &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \implies \{\alpha = \beta = \gamma = 0\}$$

alors B' est libre.

D'où B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

Matrice de passage P de B à B'

3) Déterminons la matrice de passage P de B à B' :

On a :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 + (0)e_3 \\ e'_2 = -e_1 + (0)e_2 - e_3 \\ e'_3 = (0)e_1 + e_2 + (0)e_3 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice de passage Q de B' à B

4) Déterminons la matrice de passage Q de B' à B :

On a :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 \\ e'_2 = -e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_2 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = e'_1 + (0)e'_2 - 2e'_3 \\ e_2 = (0)e'_1 + (0)e'_2 + e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_2 + 2e'_3 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouvons le lien entre P et Q :

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$\text{D'où : } P = Q^{-1}.$$

L'indice de la matrice N

5) Déterminons la matrice N telle que :

$$N = A + B - I \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'indice de nilpotence de la matrice N est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \text{ Comme } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

l'indice est $k = 2$.