Algèbre 2 Série 3 (Matrices)

Exercice 7

Dr Elbahi Hadidi

23/04/2020

Matrice associée à f

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire donnée par
$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + 4y + z)$,

1) Déterminons sa matrice associée A_f
on doit calculer l'image de la base canonique :
$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, -1) = v_1$, c'est la 1ère colonne
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (2, 4, 4) = v_2$, c'est la 2ème colonne
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (3, 6, 1) = v_3$, c'est la 3ème colonne

donc : $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 2)

a) Base de Ker f

$$\text{Ker } f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f\left((x,y,z)\right) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

$$\text{Ker } f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{5}{3} z \\ y = -\frac{2}{3} z \end{array}\right.$$

Base de Ker f

alors

$\text{Ker } f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -\frac{5}{3}z \text{ et } y = -\frac{2}{3}z\right\}$

$\text{Ker } f = \left\{\left(-\frac{5}{3}z, -\frac{2}{3}z, z\right) / z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) / z \in \mathbb{R}\right\}$

donc Ker f est engendré par un seul vecteur non nul $u_1 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$

d'où $B_1 = \{u_1\}$ est une base de Ker f et on a :

dim Ker f = card $B_1 = 1, f$ n'est pas injective.

b) Base de im f

On sait que im f est engendré par la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$

ainsi d'après théorème du rang :
dim E =dim Ker f +dim im f
$\Longrightarrow$dim $\mathbb{R}^3$ =dim Ker f +dim im f
$\Longrightarrow 3 = 1$ +dim im f
$\Longrightarrow$ dim im $f = 3 - 1 = 2$.

C'est facile de vérifier que $B_2 = \{v_1, v_2\}$ est libre.

d'où B_2 est une base de im f , f n'est pas surjective.

Non f n'est pas un automorphisme

3)
f automorphisme c.à.d f linéaire $+f$ bijective.

f n'est pas un automorphisme car :

f n'est pas bijective puique f n'est ni surjective, ni injective.