Chapitre 2 : Rappels et compléments

I-Notations et rappels

1- Notations :

a- $O(X)$= L'ensenble des ouverts de X .

$O_x(X)$= L'ensenble des oue X contenant x élement de X

$O_A(X)$= L'ensenble des ouverts de X contenant A partie de X

b-Si est un espace métrique on notera :

- $B(a,r)$ = la boule ouverte de centre a et r de rayon

- $\overline{B}(a,r)$ = la boule ouverte de centre a et r de rayon

c- Si E et F sont deux éspaces vectoriels sur le même corps on note :

$L(E,F)$: l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Remarque : Si E et F sont de dimensions finies , toute application linéaire est continue

d- Soient X et Y deux éspaces topologiques .

$C^0(X,Y)$ = l'ensemble des applications continues de X dans Y.

2-Rappels :

S X est un espace topologique compact .

$C^0(X) = C^0(X,\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $(\|f\| = \sup|f(x)|)$ est complet.

c.a.d : la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est continue.

3-Rappels de topologie:

Théorème des applications contractantes

a- Définition 1 :

Soient X et Y deux éspaces métriques .

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite k -lipschitzienne , s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) \quad \forall x,y \in X$

b- Definition 2:

f est localement lipschitzienne si $\forall\, x \in X$, $\exists\, V \in O_x(X)$ tel la restriction de f à V est k- lipschitzienne

c- Definition 3:

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite contractante , si elle est k -lipschitzienne avec $k < 1$.

Théorème:

Soit X un éspace métrique complet . $t : X \longrightarrow Y$ une application contractante

alors l'application t a un point fixe et un seul.

c.a.d: il existe un seul point z tel que $t(z) = z$

En outre pour tout x de X on a : $z = \lim_{n \longrightarrow +\infty} t^n(x)$

Exercice : faire comme exercice la démonstration de ce théorème

II) Calcul différentiel :

Définition 1:

Soient E et F deux éspaces de Banach .U un ouvert de E.
Une application f de U dans F est dite différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application tangente à f en x_0 .
Si f est différentiable en tout point de U , on dit que est f différentiable sur U .

Définition 2:

Si f est différentiable dans U , l'application $x \longrightarrow df(x)$,x parcourt U

s'appelle la différentielle de f dans U et se note df
De plus si $df(x)$ dépend continument de x dans U ,
on dit que f est continument différentiable dans U.
La fonction $x \longrightarrow \det df(x)$ s'appelle le jacobien de f dans U

Corollaire :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application
Si $\gamma : I \longrightarrow U$ tel que $\gamma(t_0) = x_0$ $I \subset \mathbb{R}$
Telle que : $\delta = f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$
Si γ est dérivable en t_0 , f différentiable en $x_0 = \gamma(t_0)$ alors
δ est dérivable en t_0 et $\delta\left(t_{0()}\right) = d\ f\ (x_0)\left(\gamma'(t_0)\right)$

III)Théorème d'inversion local et difféomorphisme :

Si f est une application de classe C^1 , d'un éspace dans un autre .
On notera : $df(x)$sa différentielle au point x .

i) a- Définitiion

soit U un ouvert de E , et V est un ouvert de F de dimension finies
$f : U \longrightarrow V$ une application de classe C^r $(r \geq 1)$
l'application f est un C^R difféomorphisme de U sur V ;
si f est une bijection de classe C^r ainsi que sa réciproque f^{-1} est de classe C^r $\left(f \text{ et } f^{-1}\text{sont continument différentiables}\right)$

-si f est différentible alors f^{-1} est différentiable
-si $f \; : U \longrightarrow V$ est différentiable
$g \; : V \longrightarrow W$ est differentiable
Alors est différentiable $(g \circ f) : U \longrightarrow W$est différentiable .

b- Proposition :

soit U un ouvert de E , et V est un ouvert de
Si $f : U \longrightarrow V$ un C^r $(r \geq 1)$ difféomorphisme , alors l'image

de tout ouvert de U est ouvert de V ,
et l'image réciproque de tout uovert de V est ouvert de U

Preuve :

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert comme f^{-1} est continue , l'image direct par d'un ouvert est un ouvert

ii) Difféomorphisme local :

Définition 1 :

soit $f \ : U \longrightarrow F$ et $x_0 \in U$
f est un C^r difféomorphisme local en x_0 , ssi il existe un voisinage U_{x_0} de x_0
dans U , un voisinage $V_{f(x_0)}$ de $f(x_0)$ dans F tel que:
$f \ : U_{x_0} \longrightarrow V_{f(x_0)}$ soit un C^r difféomorphisme

Définition 2 :

$f \ : U \longrightarrow F$ est un C^r difféomorphisme , alors c'est un C^rdifféomorphisme local sur U
En général : la réciproque n'est pas vraie

Proposition :

si $f \ : U \longrightarrow F$ est un C^r -difféomorphisme local sur U alors pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f\ (\Omega)$ est un ouvert de F.
Enparticulier $V = f\ (U)$ est un ouvert de F

De plus :
si f est injective sur U , alors $f \ ; U \longrightarrow V = f\ (U)$ est un$\neq$ C^r- difféomorphisme

III) Application Etale :

Définition :

Une application f de classe C^r est dite étale en un point x de U si
$df\ (x) \in Isom\,(E,F)$

Conséquence :

Une application est étale si elle est étale en tout point et continument différentiable .

Application:

Pour montrer qu'une application f est étale en un point x on utilise le théorème suivant :
$f \ : U \longrightarrow V$ différentiable en x point de U , pour que f soit étale en x ,
il faut et il suffit que le jacobien de f en soit non nul.

Exemple :

L'application f définie par :
: $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(\rho, \theta) \longmapsto f\ (\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$
est étale
la matrice jacobienne $M\,(\rho, \theta) = \begin{matrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{matrix}$

Det $M\,(\rho, \theta) = \rho \neq 0$

IV)Immemersions et submersions :

a-Définition :

L'application $f\ : U \longrightarrow F$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$
,
si $df\ (x)$ est injective (n $\leq$ p)
c.a.d:
si M est la matrice jacobienne de f en , M alors est de rang n
On peut extraire M de une matrice de type (n, n) de déterminant non nul.

b-Définition :

L'application $f\ : U \longrightarrow F$ de classe C^r est une submersion en $x \in U$,
si $df\ (x)$ est surjective (n $\geq$ p)
c.a.d:
si M est la matrice jacobienne de f en x , M alors est de rang p
On peut extraire M de une matrice de type (p, p) de déterminant non nul.

c-Definition :

Soit x_0 un point d'un espace E (affine), une carte au voisinage
de x_0 est couple (U, f) ou U est un ouvert de E ,
contenant x_0 et $f\ = (f_1, f_2, ..., f_n)$ est un difféomorphisme de U sur
un ouvert $f\ (U)$ de $\mathbb{R}^n$.
Les fonctions $(f_1, f_2, ..., f_n)$ sont appelées les coordonnées locales de la carte .

d- Théorèmes d'un version locales:

-Théorème d'inversion local 1 :

Soient E et F deux éspaces de Banach .
Si $f\ : U \longrightarrow F$ est de classe C^r en x_0 et $df\ (x_0) \in Isom\,(E, F)$
alors f est un C^r difféomorphisme en x_0.

-Théorème d'inversion local 2 :

Soient E et F deux éspaces de Banach .

Si $f\ : U \longrightarrow F$ est de classe C^r sur U et $df\ \ (x)\ \in Isom\,(E,F)$
alors f est un C^r difféomorphisme local sur U .

-Théorème d'inversion local 2 :
Soient E et F deux éspaces de Banach .
Si $f\ : U \longrightarrow F$ est de classe C^r sur U et $df\ \ (x)\ \in Isom\,(E,F)$
pour tout $x \in U$ et si f est injective sur U
alors f est un C^r difféomorphisme local sur U .

Remarque :
$df\ (x)$est inversible ssi :
- $n = p$ et det ($Jf\ (x)$)= n
- $n = p$ et rg$Jf\ (x) = n$
- $n = p$ et $(df_1\,(x)\,, df_2\,(x)\,, ..., df_p\,(x))$ forme une famille linéairement indépendante ou libre de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Exemple :
L'application f définie par :
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(\rho, \theta) \longmapsto f\ \ (\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ est C^∞.
det $Jf\,(\rho, \theta) = \rho$, donc $df\ \ (\rho, \theta)$ est inversible ssi $\rho \neq 0$
Alors d'après le théorème d'inversion locale
f restreint à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est un
difféomorphisme de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
En revanche n'est pas un difféomorphisme globe puisque est
$2\ \pi$ périodique en θ , donc f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

.