Chapitre 3: FORMES HERMITIENNE ET FORMES QUADRATIQUES HERMITIENNES

3.1 Quelques rappels sur les nombres complexes

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = a + ib$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Dans ce cas, le conjugué, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z sont respectivement définis par :

$$\overline{z} = a + ib,\ Re(z) = a;\ Im(z) = b \text{ et } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rappelons aussi les identités remarquables suivantes :

1)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

2)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

3)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ Re(\overline{z}) = Re(z),\ Im(\overline{z}) = -Im(z) \text{ et } Re(iz) = -Im(z)$$

4)

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$$

5)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(\overline{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \overline{z}_2)$$

6)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(\overline{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1 \overline{z}_2)$$

7)

$$\forall z_1 \in \mathbb{C},\ \forall z_2 \in \mathbb{C},\ Re(\overline{z}_1 z_2) = Re(z_1 \overline{z}_2) = \frac{1}{4}|z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$$

3.2 Formes hermitiennes

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 3.2.1

1) On rappelle qu'une application u de E dans E est dite linéaire si pour tout $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a:

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda x$$

2) On dit qu'une application u de E dans E est semi-linéaire si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \overline{\lambda} x$$

On note que cette dernière définition n'a de sens que pour un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.2

On appelle forme hermitienne sur E une application f de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :
1) f est linéaire à gauche et semi-linéaire à droite càd pour tout $x; x'; y; y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a:

$$f(\lambda x + x', y) = \lambda f(x, y) + f(x', y)$$

$$f(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda} f(x, y) + f(x, y')$$

2) f vérifie la propriété de symétrie hermitienne: pour tous $x, y \in E$ on a

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}$$

Exemple 3.1

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$ et $a_{ij} \in \mathbb{R}^*, i, j = 1, ..., n$, posons

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} x_i \overline{y_j}$$

f ainsi définie est une forme hermitienne.

Remarque 3.1

Pour $x \in E$ on a $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$ et donc

$$f(x, x) \in \mathbb{R}$$

.

3.3 Formes quadratiques hermitiennes

Définition 3.3.1

On appelle forme quadratique hermitienne une application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme hermitienne f pour laquelle on a

$$\forall x \in E; \qquad q(x) = f(x; x)$$

Remarque 3.2

Il est important de noter qu'une forme quadratique hermitienne est à valeurs réelles. En outre pour $\forall x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$$

En particulier $q(0_E) = 0$

Proposition 3.1 Soit f une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée. Alors pour $x; y \in E$ on a

$$\mathrm{Re}(f(x,y)) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

$$\mathrm{Im}(f(x,y)) = \frac{1}{2}[q(x+iy) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+iy) - q(x-iy)]$$

et donc

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)]$$

Cela prouve en particulier que la forme quadratique hermitienne q est associée à une unique forme hermitienne f, appelée forme polaire de q.

Exemples 3.2

1) L'application $z \to |z|^2$ est une forme quadratique hermitienne sur $E = \mathbb{C}$, associée à la forme hermitienne

$$(z, w) \to z\overline{w}$$

2) Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. L'application $(z_1, ..., z_n) \to \alpha_1 |z_1|^2 + ... + \alpha_n |z_n|^2$ est une forme quadratique hermitienne sur $E = \mathbb{C}^n$ associée à la forme hermitienne

$$((z_1, ..., z_n), (w_1, ..., w_n)) \to \alpha_1 z_1 \overline{w_1} + ... + \alpha_n z_n \overline{w_n}$$

3) L'application qui à une fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ associe

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt$$

est une forme quadratique hermitienne sur $E = C^0([0,1]; \mathbb{C})$. Sa forme polaire est

$$(f, g) \to \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$$

Définition 3.3.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que la matrice A est hermitienne si ${}^tA = \overline{A}$

3.4 Représentation matricielle

Soit f une forme hermitienne de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, q sa forme quadratique associée, et $B = (b_1, ..., b_n)$ une base de E.

1) La matrice de f (ou de q) dans la base B est $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, telle que pour $i; j \in [1, n]$, on a $a_{ij} = f(b_i, b_j)$. On note que la matrice A est hermitienne.

2) Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$, alors on a

$$f(x, y) =^t X.A.\overline{Y}$$

où $\overline{Y}$ est la matrice des cojugés des éléments de Y.

3) Si B' est une autre base de E, P est la matrice de passage de la base B à la base B' et A' est la matrice de f dans la base $B\prime$, alors on a

$$A' =^t PA\overline{P} :$$

4) Le polynôme caractéristique d'une matrice hermitienne d'ordre n est à coefficients réels, et possède n racines, distinctes ou confondues.

Définitions 3.4.1

On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f une forme hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée.

1) On appelle rang de f le rang de la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

2) On dit que f (ou q) est non-dégénérée si f est de rang n.

Définitions 3.4.2

1) On dit que q est positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
2) On dit que q est négative si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$.
3) On dit que q est définie positive si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.
4) On dit que q est définie négative si $q(x) < 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

3.5 Orthogonalité

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, f est une forme hermitienne sur E et q la forme quadratique hermitienne associée.

Définitions 3.5.1

1) On dit que les vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $f(x;y) = 0$ (on remarque que $f(x;y) = 0 \Leftrightarrow f(y;x) = 0$).

2) On dit que x est isotrope si $f(x,x) = 0$ (c'est-à-dire si x est orthogonal à lui-même).

3) Soit A une partie non vide de E. L'orthogonal de A est le sous-espace vectoriel de E défini par

$$A^{\perp} = \{x \in E / \ \forall a \in A, \quad f(x,a) = 0\}$$

3.6 Noyau, rang, forme non dégénérée

Définitions 3.6.1

1) On appelle noyau de q (ou de f) le sous espace vectoriel défini par

$$E^{\perp} = \{x \in E / \ \forall y \in A, \quad f(x,y) = 0\}$$

2) f est dite non dégénérée si son noyau est nul, dégénérée sinon.

Propriétés 3.6.1

1) La matrice de f dans une base de B de E est égale à la matrice, dans les bases B de E et B^* de E^* de l'application linéaire $\varphi : E \to E^*$ définie par:

$$y \to \{f_y : E \to E, \ x \to f(x,y)\}$$

2) Il existe une base de E qui est orthogonale pour f.

3) Dans une base orthogonale on a:

a) La matrice A de f est diagonale .

b) Le rang de f est égale au nombre de coefficients non nuls de cette diagonale.