I. Transformée de Laplace

Exercice 1. Trouver le transformée de Laplace X(p) des isgnaux suivants :

a. $x(t) = 2\,u(t-5)$
b. $x(t) = 4\,u(t-1) - u(t-2)$
c. $x(t) = e^{-2t}\,u(t) + e^{-3t}\,u(t)$
d. $x(t) = \left(e^{-2t}\,u(t)\right) * \left(u(t)\right),\quad *:\ symbole\ de\ la\ convolution$

Exercice 2. En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace montrer que :

a. $TL[f(t) = 3t^3 - 2t^2 + 7] = \frac{18}{p^4} - \frac{4}{p^3} + \frac{7}{p} = F(p)$
b. $TL\left[g(t) = e^{-3t} + \sin(\sqrt{2}\,t)\right] = \frac{1}{p+3} + \frac{\sqrt{2}}{p^2+2} = G(p)$
c. $TL[h(t) = -8 + \cos(t/2)] = -\frac{8}{p} + \frac{4\,p}{4p^2+1} = H(p)$
d. $TL[7\,e^{2t}\cos(3t) - 2\,e^{7t}\sin(5t)] = \frac{7p}{(p-2)^2+9} - \frac{10}{(p-7)^2+25}$
e. $TL[3\,t\sin(2t)] = \frac{12}{(p^2+4)^2} = -F'(p)$ où $F(p) = TL[3\sin(2t)]$
f. $TL[(2-t^2)e^{-5t}] = \frac{2}{p+5} - \frac{2}{(p+5)^3}$

II. Transformée de Laplace Inverse

Exercice 3. Trouver la transformée de Laplace inverse des transformées suivantes :

a. $X(p) = \frac{p+1}{(p+2)(p+5)^2}$ *solution :* $x(t) = -\frac{1}{9}\,e^{-2t} + \frac{1}{9}\,e^{-5t} + \frac{4}{3}\,t.e^{-5t}$.
b. $Y(p) = \frac{2\,p+5}{p^2+6}$ *solution :* $x(t) = 2\,\cos(\sqrt{6}t) + \frac{5}{\sqrt{6}}\sin(\sqrt{6}t)$.

Exercice 4. Trouver la transformée de Laplace inverse de :

a.) $\boldsymbol{X(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}}$ → ***solution***: $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$
b.) $\boldsymbol{Y(p) = \frac{1}{p(p^2+9)}}$ → ***solution***: $y(t) = \frac{1-\cos(3t)}{9}$
c.) $\boldsymbol{F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}}$ → ***sol.*** $f(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t) + e^{-t})$

Exercice 5. En utilisant l'integrale de convolution, montrer que :

$$\mathcal{TL}^{-1}\left\{\frac{2\,p}{(p^2+1)^2}\right\} = t\sin(t)$$

Exercice 6. Appliquer le théorème de convolution pour résoudre l'équation intégrale suivante :

$$chercher\ f(t)\ ?\ \ telle\ \ que: \quad f(t) = 2\cos(t) - \int_0^t (t-\tau)\ f(\tau)d\tau$$

$$\boldsymbol{solution} : \ \boldsymbol{f(t) = 2\cos(t) - t\sin(t)}$$

Exercice 7. Utiliser la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée et sachant que $Y(p) = TL\{y(t)\}\ et\ X(p) = TL\{x(t)\}$, pour déterminer $\frac{Y(p)}{X(p)}$ pour les equations différentielles suivantes :

a. $3\ \frac{dy}{dt} + 2\ y(t) = 5\ x(t)\ \ ,\ avec\ y(0) = 0$
b. $4\ \frac{d^2y}{dt^2} + 3\ \frac{dy}{dt} + 2\ y(t) = 5\ x(t)\ \ ,\ avec\ y(0) = 1\ \ et\ y'(0) = 2$

Solution :

a. $\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{5}{3\ p+2}$
b. $Y(p) = \frac{1}{4p^2+3p+2} X(p) + \underbrace{\frac{4p+11}{4p^2+3p+2}}_{\text{à cause des conditions initiales non nulles}}$

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 avec conditions initiales suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\ \frac{dy}{dt} + 2\ y(t) = e^{-4t}\ , \qquad avec\ y(0) = 1\ \ et\ y'(0) = 5$$

Solution :

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2 - 3\ p + 2} + \frac{1}{(p^2 - 3\ p + 2)(p+4)} = \frac{p^2 + 6p + 9}{(p-1)(p-2)(p+4)}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\} = -\frac{16}{5}\ e^{t} + \frac{25}{6}\ e^{2t} + \frac{1}{30}\ e^{-4t}}$$