I. Transformée de Laplace

I.1 Introduction

La transformée de Laplace (TL) joue un rôle très important dans l'étude et l'analyse des systèmes linéaires invariants dans le temps. C'est un outil très utile qui facilite énormément la résolution des équations différentielles linéaires à paramètres constants. Par conséquent, cela permettra de déterminer la réponse de tels systèmes à n'importe quelle excitation (signal d'entrée) pourvu que la réponse du système à une excitation de Dirac soit connue. Ceci est le fait du théorème de la convolution qui conduit à la notion de fonction de transfert d'un système. L'importance de la TL pour les systèmes linéaires invariants est ce que la transformée de Fourier (TF) est pour les signaux. La TL est une transformée qui agit sur l'intervalle $[0, \infty]$ et non pas, comme la transformée de Fourier qui opère sur $[-\infty, \infty]$. Pour cette raison, la TL est utile pour résoudre les problèmes dépendants de conditions initiales, tel que la théorie des circuits éléctriques, dont le comportement est décrit par l'instant $t = 0$ de fermeture des interrupteurs et la valeur initiale $f(0)$ d'une grandeur (courant, tension,...) spécifiée.

I.2 Définition

La TL est une généralisation de la transformée de Fourier en ce qui concerne le domaine de définition de la variable ω étendu au domaine complexe de la variable$p$. D'autre part, on admet que la fonction à transformer est causale, c'est-à-dire $nulle\ pour\ t < 0$. La transformée de Fourier est un cas particulier de la transformée de Laplace définie sur l'axe imaginaire $j\omega$, c'est-à-dire en posant $p = j\omega$.

La transformée de Laplace $F(p)$ d 'une fonction $f(t)$ $causale$ est définie par :

$$\boldsymbol{f(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \mathcal{TL}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} dt}$$

avec $p = \sigma + j\omega$ variable complexe de Laplace, la multiplication par $e^{-\sigma t}\ et\ \sigma > 0$ assure la convergence de l'intégrale de Fourier $\forall\, t \geq 0$

Si cette intégrale converge, on dira que la transformée de Laplace existe, ce qui est généralement le cas pour un domaine de convergence. Dans ce domaine, $F(p)$ existe lorsque $\sigma = Re(p)$: $partie\ réelle\ de\ p\ > \gamma\ réel$, il définit le plan de convergence dans le domaine complexe $p = \sigma + j\omega$ de Laplace.

La TL est une fonction complexe analytique de la variable complexe p (dérivable) et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,(-te^{-pt})\, dt = \int_0^{+\infty} -t\, f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

- **Exemple de Transformée de Laplace des signaux usuels :**

$$Impulsion\ de\ Dirac\ \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \boldsymbol{\mathcal{TL}[\delta(t)]} = F(p) = \int_0^{+\infty} \delta(t)\, e^{-pt}\, dt = e^{-pt}{}_{|t=0} = 1$$

$$\boldsymbol{\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} 1}$$

$$echelon\ unit\acute{e}\ u(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \boldsymbol{\mathcal{TL}[u(t)]} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\ dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\boldsymbol{u(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \frac{1}{p}}$$

$Exponentielle\ d\acute{e}croissante\ causale\ e^{-at}u(t)$:

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \boldsymbol{\mathcal{TL}}[e^{-at}\boldsymbol{u(t)}] = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt =$$

$$-\frac{1}{p+a} e^{-pt}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{p+a}\right) = \frac{1}{p+a}, \qquad Re(p+a) > 0 \rightarrow Re(p) > -a$$

$$\boldsymbol{e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \frac{1}{p+a}}$$

I.3 Propriétés de la Transformée de Laplace

Soient $X(p)$, $X_1(p)$, $X_2(p)\ et\ Y(p)$ les transformées de Laplace desdes signaux $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)\ et\ y(t)\ respectivement, et\ les\ constantes\ a\ , a_1 et\ \ a_2\ des\ r\acute{e}els$, on a les propriétés suivantes très utiles pour le calcul de la transformée de Laplace :

- **Linéarité :**

$$si\ \boldsymbol{x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)}\ alors\ \boldsymbol{X(p) = a_1X_1(p) + a_2X_2(p)}$$

- **Translation ou retard fréquentiel** (ou multiplication par une exponentielle) :

$$\boldsymbol{e^{at}x(t) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \mathcal{TL}[e^{at}x(t)] = X(p-a)}$$

- **Translation ou retard temporel :**

$$\boldsymbol{y(t) = x(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \mathcal{TL}[x(t-\tau)] = Y(p) = e^{-\tau p}X(p)}$$

- **Changement d'échelle :**

$$\boldsymbol{y(t) = x(at) \xrightarrow{\mathcal{TL}} \mathcal{TL}[y(t) = x(at)] = Y(p) = \frac{1}{a}X\left(\frac{p}{a}\right)}$$

- **Dérivation :** $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{d}{dt}x(t)} \xrightarrow{\mathcal{TL}} \boldsymbol{\mathcal{TL}[y(t) = \dot{x}(t)] = Y(p) = pX(p) - x(0)}$$

Démonstration :

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}}[\boldsymbol{y(t)} = \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})] = \int_0^{+\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\, e^{-pt}\, dt = [x(t)e^{-pt}]_{t=0^+}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\, e^{-pt}\, dt =$$

$$\textit{après intégration par partie} \qquad \boldsymbol{Y(p) = p\, X(p) - x(0)}$$

Pour la dérivée seconde $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ on a, en intégrant par partie :

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}}[\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})] = \int_0^{+\infty} \ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\, e^{-pt}\, dt = [\dot{x}(t)e^{-pt}]_{t=0^+}^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\, e^{-pt}\, dt =$$

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}[\ddot{x}(t)] = p^2\, X(p) - p\, x(0) - \dot{x}(0)}$$

En général, pour une dérivée $d'ordre\ n\ de\ x(t)$ on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}\left[x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]} =$$

$$= \boldsymbol{p^n\, X(p) - p^{n-1}\, x(0) - p^{n-2}\dot{x}(0) \ldots . - p x^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)}$$

- **Intégration de x(t) :**

$$si\ \ y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau \quad alors\ \ \boldsymbol{\mathcal{TL}}\left[y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau\right] = \boldsymbol{Y(p)} = \boldsymbol{\frac{X(p)}{p}}$$

- **Multiplication de $x(t)$ par t^n :**

$$si\ \ y(t) = t^n\, x(t) \qquad alors\ \ \boldsymbol{\mathcal{TL}}[y(t) = t^n\, x(t)] = \boldsymbol{Y(p)} = \boldsymbol{(-1)^n \frac{d^n X(p)}{dp^n}}$$

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\boldsymbol{\lim_{t\to 0} x(t) = x(0) = \lim_{p\to +\infty} p\, X(p)}$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$\boldsymbol{\lim_{t\to +\infty} x(t) = x(+\infty) = \lim_{p\to 0} p\, X(p)}$$

- **Théorème de Convolution :**

La transformée de Laplace d'un produit de convolution dans le domaine temps devient un produit simple dans le domaine de Laplace et vice versa.

$$si \;\; y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau) d\tau$$

$$alors \;\; \boldsymbol{\mathcal{TL}}\left[\boldsymbol{y(t) = h(t) * x(t)}\right] = \boldsymbol{Y(p) = X(p).H(p)}$$

Ce théorème joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes linéaires invariants. Il permet une description complète du comportement dynamique de tels systèmes. La réponse du système à toute excitation d'entrée est déterminée exactement si on connait auparavant la réponse impulsionnelle du système à l'excitation par une impulsion de Dirac. Dans ce cas, on peut analyser l'évolution dynamique du système concernant son régime transitoire, sa réponse statique ou régime permanent, voire même sa rapidité et sa stabilité en utilisant le concept de fonction de transfert qui relie la sortie à l'entrée dans le domaine de Laplace.

II. Transformée de Laplace Inverse

II.1 Introduction

On détermine la transformée de Laplace inverse $x(t)\ de\ X(p)$ à partir de la transformée de Fourier inverse de $X(\sigma + j\omega)$ et qui est $x(t)e^{-\sigma t}$ en effet :

en posant $p = \sigma + j\omega$ dans l'intégrale de Laplace de $X(p)$ il vient que :

$$\boldsymbol{X}(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt} = \int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t} dt}$$

En admettant que σ *, partie réelle de la variable de Laplace* p, appartienne à l'intervalle de convergence de $X(p)$, on peut dire que $\boldsymbol{X}(\sigma + j\omega)$ **,** fonction de $\boldsymbol{\omega}$, représente la transformée de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$.

La transformée de Fourier inverse est ainsi donnée par :

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

D'où on tire :

$$x(t) = e^{+\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(\sigma + j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{X}(\sigma + j\omega)\, e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

Ce qui conduit à :

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)\, e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega}$$

$$puisque\ p = \sigma + j\omega\ \ donc\ dp = j\ d\omega\ \ \rightarrow d\omega = \frac{1}{j}\ dp,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{TL}^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} X(p)\, e^{pt} dp}$$

Cette expression définit la transformée de Laplace inverse. Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de X(p) on utlise souvent la table des transformées de Laplace de fonctions usuelles connues ou bien en décomposant X(p) sous forme d'une somme d'éléments plus simples que l'on peut facilement utiliser à l'aide des tables de transformées.

II.2 Décomposition de la TL en somme de fractions simples

Dans le cas où X(p) est une fraction rationnelle propre, c'est-à-dire , le rapport de deux polynomes en p tel que l'ordre du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur alors on peut factoriser ce dernier et exprimer X(p) sous forme :

$$X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p^1+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p^1+a_0}=\frac{N(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i)},\quad n>m$$

$les\ \alpha_i\ représentent\ les\ pôles\ de\ X(p),\ ou\ racines\ du\ dénominateur\ D(p)$

Deux cas de catégories de pôles possibles pour $X(p)$:

- pôles simples
- pôles multiples

- **Décomposition de X(p) ayant uniquement de pôles simples : $\alpha_i \neq \alpha_j\ \forall\, i \neq j$**

Dans ce cas on peut décomposer X(p) sous forme de somme de fractions simples propres d'ordre 1 en p de la façon suivante :

$$\boldsymbol{X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(p)}{\prod_{i=1}^{n}(p-\alpha_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(p-\alpha_i)}}$$

$$\boldsymbol{x(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i\, e^{\alpha_i t}\, u(t)}$$

Calcul des coefficients A_i :

Les coefficients A_i sont déterminés en évaluant le produit $(p-\alpha_i)X(p)$ au point $p=\alpha_i\,,\quad pour\ tout\ i=1\dots n$

$$\boldsymbol{A_i=(p-\alpha_i)X(p)\big|_{p=\alpha_i}=\frac{N(\alpha_i)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\alpha_k-\alpha_i)}\quad pour\ \ i=1\dots n}$$

- **Exemple**

soit à calculer la $TL\ inverse$ de :

$$X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{1}{p^2+\ 7\,p\ +10}$$

Solution

On écrit $D(p)$ sous forme de produit de facteurs en cherchant les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les pôles de $X(p)$:

$$D(p) = p^2 + 7p + 10 = (p+2)(p+5),$$

$D(p)$ *est un polynôme d'ordre* 2 , *ses deux racines sont* $\alpha_1 = -2$ *et* $\alpha_2 = -5$

On peut donc décomposer X(p) sous la forme suivante :

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p^2 + 7p + 10} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{p+5}$$

✓ **Calcul des coefficients A_1 et A_2 :**

$$\boldsymbol{A_1} = (p+2)X(p)\Big|_{p=-2} = \frac{(p+2)}{(p+2)(p+5)}\Big|_{p=-2} = \frac{1}{-2+5} = +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{A_2} = (p+5)X(p)\Big|_{p=-5} = \frac{(p+5)}{(p+2)(p+5)}\Big|_{p=-5} = \frac{1}{-5+2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\boldsymbol{X(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p^2 + 7p + 10} = +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}+\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}+\mathbf{5}}$$

En utilisant la table des transformées la TL inverse $x(t)$ est donc:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} A_i\, e^{\alpha_i t}\, u(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}\, u(t) - \frac{1}{3}\, e^{-5t}\, u(t) =$$

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\right) u(t)}$$

- **Décomposition de X(p) ayant des pôles multiples de multiplicité r**

Soit le cas d'un pôle multiple α_1 *d'ordre* r ;
$X(p)$ *possède* 1 *pôle multiple d'ordre* r *et* $(n-r)$ *pôles simples* :

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-\alpha_1)^r \prod_{i=r+1}^{n}(p-\alpha_i)} ,$$

$$X(p)\ propre\ : m < n , \qquad N(p) \rightarrow ordre\ m \quad D(p) \rightarrow ordre\ n$$

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p-\alpha_1)^r\,(p-\alpha_{r+1})(p-\alpha_{r+2})\dots(p-\alpha_n)}$$

L'expansion de $X(p)$ donne :

$$\boldsymbol{X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{A_{1r}}{(p-\alpha_1)^r}+\frac{A_{1(r-1)}}{(p-\alpha_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{A_{1(r-i)}}{(p-\alpha_1)^{r-i}}+\cdots+\frac{A_{12}}{(p-\alpha_1)^2}+\frac{A_{11}}{(p-\alpha_1)^1}+\frac{A_{r+1}}{(p-\alpha_{r+1})}+\cdots+\frac{A_n}{(p-\alpha_n)}}$$

Les coefficients des racines ou poles multiples de X(p) s'obtiennent en utilisant les formules suivantes :

$$\boldsymbol{\frac{A_{1(r-i)}}{(p-\alpha_1)^{r-i}}} \longrightarrow \boldsymbol{A_{1(r-i)}=\frac{1}{i\,!}\left[\frac{d^i}{dp^i}\left\{(p-\alpha_1)^r\,\frac{N(p)}{D(p)}\right\}\right]_{p=\alpha_1}}\ , \qquad \boldsymbol{i=0,1,\ldots r-1}$$

- **Exemple**

soit à calculer la TL inverse de X(p) donnée par :

$$X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{1}{p^2(p+1)}$$

$X(p) est\ d'ordre 3$, il possède un pôle multiple d'ordre $r=2$ $au\ point\ \boldsymbol{\alpha_1}\ =0$

$et\ un\ pôle\ simple\ au\ point\ \boldsymbol{\alpha_3}=-1$.

La décomposition de X(p) nous donne :

$$X(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{\boldsymbol{A_{12}}}{\boldsymbol{p^2}}+\frac{\boldsymbol{A_{11}}}{\boldsymbol{p}}+\frac{\boldsymbol{A_3}}{\boldsymbol{p+1}}$$

- ✓ **Calcul de A_{12} , A_{11} et A_3**

$$\boldsymbol{A_{12}}=p^2X(p)\Big|_{p=0}=\frac{1}{p+1}\Big|_{p=0}=\boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{A_{11}}=\frac{1}{1!}\frac{d}{dp}[p^2X(p)]\Big|_{p=0}=\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p+1}\right]\Big|_{p=0}=-\frac{1}{(p+1)^2}\Big|_{p=0}=\boldsymbol{-1}$$

$$\boldsymbol{A_3}=(p+1)X(p)\Big|_{p=-1}=\frac{1}{p^2}\Big|_{p=-1}=\boldsymbol{1}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\boldsymbol{X(p)=\frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{1}{p^2}+\frac{-1}{p}+\frac{1}{p+1}}$$

$$\boldsymbol{X(p)\xrightarrow{TL^{-1}}x(t)=t.u(t)-u(t)+e^{-t}u(t)}$$

$$\boldsymbol{x(t)=(t-1+e^{-t})\,u(t)}$$

II.3 Résolution des Equations Différentielles Linéaires

Il ressort du résultat général donné par la propriété de dérivation que $TL\,\{d^n y(t)/dt^n\}$ dépend de $Y(p) = TL\{y(t)\}$ et des $(n-1)$ dérivées de $y\,(t)$ évalué au temps $t = 0$. Cette propriété rend la transformée de Laplace parfaitement adaptée pour résoudre des problèmes linéaires avec conditions initiales dans lesquels l'équation différentielle est à coefficients constants. Une telle équation différentielle est simplement une combinaison linéaire de termes $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$

$$et\ n\ conditions\ initiales\ \ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

$$les\ a_i\ , i = 0 \ldots n, et\ y_0, y_1, \ldots y_{n-1}\ sont\ constants$$

Par la propriété de linéarité, la transformée de Laplace de cette combinaison linéaire est une combinaison linéaire de transformées de Laplace:

$$a_n TL\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}TL\left\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_1 TL\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + a_0 TL\{y(t)\} = TL\{x(t)\}$$

En appliquant la propriété de la TL des signaux dérivés on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} a_n\left[p^n Y(p) - p^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)\right] \\ + a_{n-1}\left[p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)\right] + \cdots + a_0 Y(p) = X(p) \end{aligned}$$

En d'autres termes, la transformation de Laplace d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants devient une équation algébrique en $Y(p)$. Si nous résolvons cette équation générale transformée pour $Y(p)$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{a_n p^n} + \boldsymbol{a_{n-1}p^{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{a_0}]\boldsymbol{Y(p)} \\ = \Big[[a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1]y(0) \\ + [a_n p^{n-2} + a_{n-1}p^{n-3} + \cdots + a_2]y'(0) + \cdots + [a_n p^1 + a_{n-1}]y^{(n-2)}(0) \\ + a_n y^{(n-1)}(0)\Big] + \boldsymbol{X(p)} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, on obtient l'expression compacte suivante :

$$\boldsymbol{D(p)\,Y\,(p)} = \underbrace{\boldsymbol{Q\,(p)}}_{\substack{\textit{terme dû} \\ \textit{aux conditions initiales}}} + \underbrace{\boldsymbol{X(p)}}_{\substack{\textit{excitation} \\ \textit{ou signal d'entrée}}}$$

où $D(p) = [a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0]$

$$Q\,(p) = \Big[[a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + \cdots + a_1]\boldsymbol{y}(\mathbf{0}) + [a_n p^{n-2} + a_{n-1}p^{n-3} + \cdots + a_2]\boldsymbol{y}'(\mathbf{0}) + \cdots + [a_n p^1 + a_{n-1}]\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})}(\mathbf{0}) + a_n \boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}(\mathbf{0})\Big]$$

Ce qui permet d'écrire :

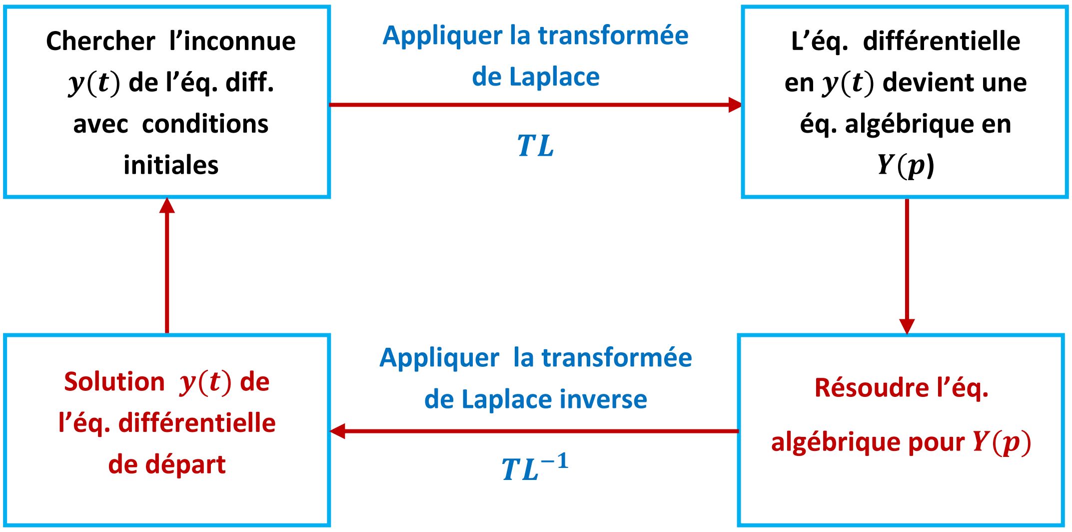
$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})} + \frac{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p})}{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})}$$

En passant à la transformée de Laplace inverse de Y(p) on obtient la solution générale $y(t)$ de l'équation différentielle et dont l'expression est la suivante :

$$la\ solution\ générale\ \ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{TL}^{-1}\{Y(p)\} = \underbrace{\boldsymbol{TL}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{D(p)}\right\}}_{\substack{\textbf{solution de} \\ \textbf{l'équation homogène}}} + \underbrace{\boldsymbol{TL}^{-1}\left\{\frac{X(p)}{D(p)}\right\}}_{\substack{\textbf{solution particulière} \\ \textbf{dûe à l'excitation}}}$$

La solution générale de l'équation différentialle est composée de la combinaison de deux parties, à savoir, la solution de l'équation homogène (sans excitation, $x(t) = 0$) qui est dûe aux conditions initiales non nulles$\left(y^{(i)}(0)\ \neq 0\right)$, et la solution particulière qui elle est dûe uniquement à l'éffet de l'éxcitation $x(t)$ avec conditions initiales nulles $\left(y^{(i)}(0) = 0\ \ \forall i\right)$.

La procédure de résolution est résumée dans le diagramme suivant :



Exemple

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{13}\sin(\mathbf{2}\boldsymbol{t}),\quad \boldsymbol{avec}\ \ \boldsymbol{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{6}$$

Solution

Tout d'abord on applique la T$\mathcal{L}$ aux deux membres de l'équation différentielle :

$$T\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 3\,T\mathcal{L}\{y\} = 13\,T\mathcal{L}\{\sin(2t)\}$$

A partir de la propriété de la transformée de la dérivée on a :

$$T\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p) - 6$$

$$T\mathcal{L}\{y\} = Y(p) \quad et \quad T\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{p^2 + 2^2}$$

D'où l'équation algébrique en fonction de Y(p) :

$$p\,Y(p) - 6 + 3Y(p) = 13\,\frac{2}{p^2 + 4}$$

$$(p+3)Y(p) - 6 = \frac{26}{p^2 + 4}$$

$$(p+3)Y(p) = 6 + \frac{26}{p^2 + 4}$$

La résolution de cette équation algébrique donne :

$$\boldsymbol{Y(p) = \frac{6}{(p+3)} + \frac{26}{(p+3)(p^2 + 4)} = \frac{6p^2 + 50}{(p+3)(p^2 + 4)}}$$

$Y(p)$ étant une fonction rationelle propre, ayant un pôle simple $\alpha_0 = -3$ et deux pôles complexes conjugués $\alpha_{1,2} = \pm 2j$ on peut la décomposer en fractions simples de la manière suivante :

$$\boldsymbol{Y(p) = \frac{6p^2 + 50}{(p+3)(p^2 + 4)} = \frac{A}{(p+3)} + \frac{Bp + C}{(p^2 + 4)}}$$

Calcul des coefficients $A, B, et\ C$:

En mettant sous dénominateur communs les deux termes de droite :

$$Y(p) = \frac{6p^2 + 50}{(p+3)(p^2 + 4)} = \frac{A(p^2 + 4) + (Bp + C)(p+3)}{(p+3)(p^2 + 4)}$$

Par égalité des deux numérateurs on a :

$$6p^2 + 50 = A(p^2 + 4) + (Bp + C)(p+3)$$

Si on prend $p = -3$, il vient directement que :

$$p = -3 \longrightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{8}$$

Par identification des coefficients en p^2 et p on obtient les relations suivantes :

$$6 = A + B, \quad et \quad 0 = 3B + C$$

$$A = 8 \longrightarrow \boldsymbol{B} = 6 - A = 6 - 8 = \mathbf{-2}$$

$$et\ par\ là\ on\ déduit \quad \boldsymbol{C} = 0 - 3B = -3B = -3 \times (-2) = \mathbf{6}$$

Les coefficients sont alors :

$\boldsymbol{A} = \mathbf{8}$, $\quad \boldsymbol{B} = \mathbf{-2}$, $\quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{C} = \mathbf{6}$

Ainsi :

$$Y(p) = \frac{6p^2 + 50}{(p+3)(p^2 + 4)} = \frac{8}{(p+3)} + \frac{-2p+6}{(p^2 + 4)} = \frac{8}{(p+3)} - 2\frac{p}{(p^2 + 4)} + \frac{6}{(p^2 + 4)}$$

En passant à la transformée de Laplace pour chaque terme de droite on obtient la solution suivante pour $y(t)$:

$$y(t) = T\mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(p+3)}\right\} - 2T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2 + 4)}\right\} + T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(p^2 + 4)}\right\}$$

Sachant que : $T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(p+3)}\right\} = 8e^{-3t}$

$$de\ même \quad -2T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2 + 4)}\right\} = -2\cos(2t)$$

$$et \quad T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(p^2 + 4)}\right\} = 3T\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p^2 + 4)}\right\} = 3\sin(2t)$$

On obtient donc la solution :

$$\boldsymbol{y(t) == T\mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = 8e^{-3t} - 2\cos(2t) + 6\sin(2t)}$$

Table de quelques transformées de Laplace

Fonction causale $x(t)u(t)$	Transformée de Laplace $X(p) = TL\{x(t)\}$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon unité $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Echelon retardé $u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$
Signal retardé $x(t-\tau)u(t-\tau)$	$X(p)e^{-\tau p}$
Signal rampe $t\,.\,u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n\,.\,u(t)$, $n = 1, 2, 3 \ldots.$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Signal Exponentiel $e^{at}\,u(t)$	$\frac{1}{p-a}$
Multiplication par Exponentielle $e^{at}\,x(t)$	$X(p-a)$
$t^n\,.\,e^{at}$, $n = 1, 2, 3 \ldots.$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
Signal sinusoide $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
Multiplication par t $t\,.\,x(t)$	$-\frac{d}{dp}X(p)$
$t\sin(\omega\, t)$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t\cos(\omega\, t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
Multiplication par t^n $t^n\,.\,x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p)$

La transformée de Laplace est définie pour les signaux causaux, $= 0\ \forall\ t < 0$.

On obtient un signal causal en le multipliant par l'échelon unité $u(t)$.