Solution de la série "répartition de charge"

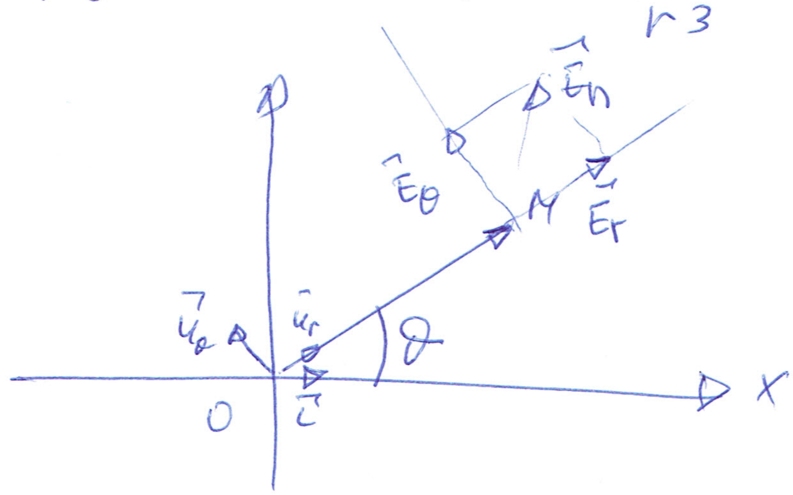
Ex1 : Voir cours partie I : nous avons $V = \frac{KP\cos\theta}{r^2}$, $\vec{E}_M = -\vec{\nabla} V$

$V(r,\theta) = \frac{KP\cos\theta}{r^2}$, $\vec{E}_M = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$, $\vec{\nabla}_{pol} = +\frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

Donc $E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta = -\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\theta)}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow E_r = -\frac{d}{dr}\left[KP\cos\theta/r^2\right]$ $\quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left[KP\cos\theta/r^2\right]$

$E_r = \frac{2KP\cos\theta}{r^3}$, $\quad E_\theta = \frac{KP\sin\theta}{r^3}$



Ex2 : Le fil infini a été traité lors du dernier cours à l'A14 puis refait en application 01 du cours partie II

Ex3 : Comme l'anneau en question est de géométrie finie (O,R) donc en tenant compte de λ, il doit contenir une charge globale Q_0 $dq = \lambda\, dl \Rightarrow \int_0^{Q_0} dq = \lambda \int_0^L dl$, L étant la longueur totale de l'anneau

.../...

$q\Big|_0^{q_0} = \lambda l\Big|_0^L \Rightarrow q_0 = \lambda L$, l'anneau étant de rayon R donc de périmètre $2\pi R = L$

$$\lambda = \frac{q_0}{2\pi R} \ (C/m)$$

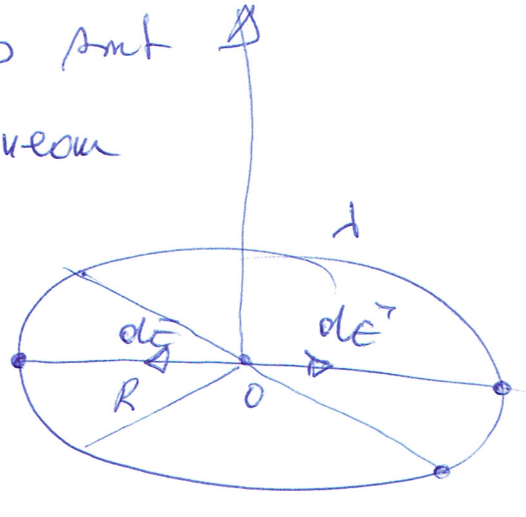
2°) $dq = \lambda dl$, $dV = \dfrac{k\,dq}{r} = \dfrac{k\lambda dl}{r}$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k\lambda dl}{r^2}$$

le potentiel st un scalaire, le champ st un vecteur si on applique le PS on aura:

Comme le potentiel et le champ sont demandés au centre de l'anneau

donc : $dV = \dfrac{k\lambda dl}{R}$, $dE = \dfrac{k\lambda dl}{R^2}$



$$\int_0^{V_M} dV = \frac{k\lambda}{R}\int_0^L dl, \quad V_M = \frac{k\lambda}{R}\cdot 2\pi R$$

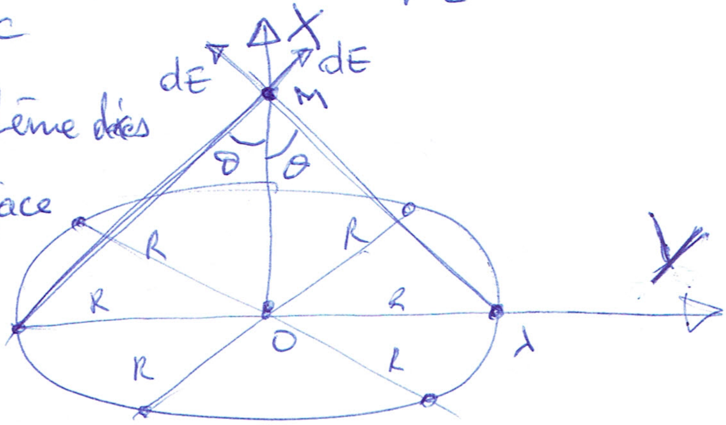
$$V_M = 2\pi k\lambda \ (V)$$

Pour le champ : chaque deux éléments dE crées au centre de l'anneau sont opposes et egaux en modules donc la résultante de tous les champs crée au centre de l'anneau st nulle. $E(0) = 0$

Ex4 : Tout ce qui a été dit à la solution de l'Exo 3 va se répéter et le seul changement est que nous allons calculer E et V sur l'axe de symétrie de l'anneau qui est supposé OX dans l'exo.

1°/ $dq = \lambda dl$, donc $dV = \frac{k dq}{r}$ $dE = \frac{k dq}{r^2}$

le champ est un vecteur, donc on le projettera dans un système d'axes comme on voit sur figure d'en face



les projections suivant OY $+dE \sin\theta - dE \sin\theta = 0$ s'annulent et suivant OX s'ajoutent. $dE_x = dE \cos\theta = \frac{k dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\lambda dl \cos\theta}{r^2}$

$\cos\theta = \frac{OM}{r} = \frac{x}{r}$, $r = (R^2+x^2)^{1/2}$

$dE_x = \frac{k\lambda \cos\theta}{r^2} . dl = \frac{x k \lambda}{(R^2+x^2)^{3/2}} . dl$, $\int_0^{E_M} dE = \frac{k\lambda x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \int_0^L dl$

$E_M = \frac{k\lambda x}{(R^2+x^2)^{3/2}} 2\pi R$, $E_M = \frac{2\pi k \lambda x R}{(R^2+x^2)^{3/2}}$

Pour le potentiel :

$dV = \frac{k\lambda dl}{r} \Rightarrow \int_0^{V_M} dV = \frac{k\lambda}{(R^2+x^2)^{1/2}} \int_0^L dl$, $V_M = \frac{2k\pi\lambda R}{(R^2+x^2)^{1/2}}$

Exo5 : Une erreur s'est produite dans l'énoncé de cet exo il fallait lire $E(z)$ au lieu $E(x)$, en même temps lire $z \gg R$ et $z \ll R$

1°) $dq = \sigma_0 ds$, $ds = 2\pi x dx$, $\int_0^{Q} dq = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} x dx \Rightarrow Q = \frac{2\pi}{2}(R_2^2 - R_1^2)$

2°) le calcul de $\vec{E}(z)$ et $V(z)$ est analogue à la solution de l'application n°2 du cours de la partie II
les bornes d'intégration de l'application n°2 étaient de 0 à R par contre celles de l'exo 5 seront de R_1 à R_2

$$E(z) = -\pi K \sigma_0 \left(\frac{z}{(x^2+z^2)^{1/2}} \right) \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$V(z) = 2\pi K \sigma_0 (x^2+z^2)^{1/2} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

3°) La vérification de $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ est la même que l'application n°2

4°) Lorsque $z > 0$, $z \gg R$ $\vec{E}(z) \cong \frac{\pi K \sigma_0 R^2}{z^2} \vec{k}$

c'est l'équivalent d'un champ créé par une charge $\pi \sigma_0 R^2$ au point z

Lorsque $z > 0$ $z \ll R$ $\vec{E}(z) \simeq K 2\pi \sigma_0 \vec{k} = \frac{2\pi \sigma_0}{4\pi \varepsilon_0} \vec{k} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{k}$

c'est le champ créé par un plan infini qui porte une distribution σ_0